



زمان برگزاری: ۱۱۲۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آمار و احتمال یازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱ در داده‌هایی با جدول فراوانی مقابل، اگر واریانس برابر ۶ باشد. فراوانی دسته سوم کدام است؟

فراوانی	حدود دسته
۳	۵ - ۷
۲	۷ - ۹
a	۹ - ۱۱
۶	۱۱ - ۱۳
۱	۱۳ - ۱۵

۲ ۵ زن و ۷ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال امکان استخدام تنها برای ۳ نفر از آنها وجود دارد. احتمال انتخاب ۳ نفر در حالت‌های زیر را بررسی کنید:
الف) ۲ زن و یک مرد انتخاب شوند.
ب) ۳ زن انتخاب شوند.

۳ از جعبه‌ای شامل ۷ مهره زرد و ۹ مهره سیاه، ۲ مهره به تصادف و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه الف) هر دو مهره سیاه باشند. ب) هر دو مهره هم‌رنگ باشند.

۴ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب‌وهوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب‌وهوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۵ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۶ کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند.

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = x\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 + 2m = 3m^2\}$$

۷ با توجه به جدول فراوانی زیر اگر بدانیم مساحت زیر نمودار چندبهر فراوانی ۷۲ باشد، مقدار x چقدر است؟

مرکز دسته	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۵
فراوانی	۴	۵	x	۶	۳

۸ اگر $P(A) = 0.6$ و $P(B) = 0.3$ و A و B مستقل باشند، $P(A \cup B)$ کدام است؟

۹ ۵ مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف ۲ مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد با چه احتمالی دو مهره هم‌رنگ هستند؟



۱۰ خانواده‌ای دارای سه فرزند است چقدر احتمال دارد:

الف) همه فرزندانش همجنس باشند.

ب) حداقل دو فرزند پسر باشد.

ج) فرزند اول دختر باشد.

د) حداکثر ۲ فرزند پسر باشد.

۱۱ عبارات زبان فارسی را به زبان ریاضی تبدیل کنید و بالعکس.

الف) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 + 1 > 0$.

ب

$$\exists x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1$$

پ

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x = 0$$

ت) بعضی از اعداد زوج، مضرب ۳ هستند.

۱۲ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت نام کرده‌اند را بداند. برای این کار او یک نمونه تصادفی از سن

۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند میانگین سن آن‌ها ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار سن دانشجویان ۱٫۹ باشد. بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه محاسبه کنید.

۱۳ مدیر تولید یک روزنامه می‌خواهد درصد روزنامه‌های معیوب را بررسی کند. برای این منظور، ۱۰۰ روزنامه به تصادفی انتخاب می‌شود که ۱۶ تا

از آنها معیوب است. یک فاصله اطمینان برای درصد روزنامه‌های معیوب محاسبه کنید. اگر بخواهیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را چقدر انتخاب کنیم؟

۱۴ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز، ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این

اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای نمودار دایره‌ای هر دو

۱۵ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفته گذشته چه عددی

است؟

۱۶ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی

گذشته را به دست آورید؟

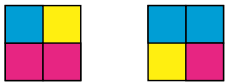
۱۷ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو

شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است:

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به

دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟ برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم

آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.



$$\begin{pmatrix} 470 & 580 \\ 690 & 690 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 470 & 470 \\ 580 & 690 \end{pmatrix}$$

رنگ‌ها	طیف‌رنگ‌ها
	450 تا 495
	495 تا 570
	570 تا 590
	570 تا 620
	620 تا 750

۱۸) در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جای گذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آنکه:

- الف) هر دو مهره قرمز باشند.
ب) حداقل یک مهره آبی باشد.
پ) هر دو مهره هم رنگ باشند.

۱۹) اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند. آیا A و B می توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲۰) دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

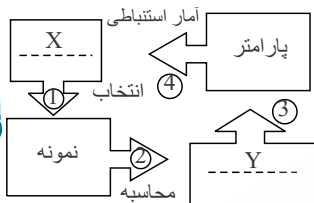
۲۱) خانم ها اکبری، برنا، چمنی، نسخه خوان یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب ۲۰، ۳۰، ۵۰ درصد کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای که به آنها سپرده می شود را بدون غلط انجام دهند به ترتیب ۰٫۹، ۰٫۹۵، ۰٫۹۹ است. صفحه ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۲۲) درستی هریک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

- الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$ ج) $(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$

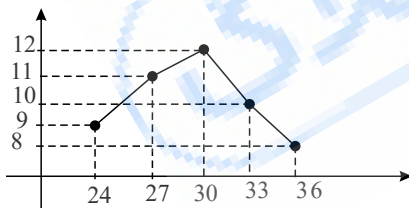
۲۳) نمونه گیری غیر احتمالی به چند دسته تقسیم می شود؟ نام ببرید.

۲۴) در جاهای خالی واژه مناسب بنویسید.



۲۵) اگر مساحت زیر نمودار مستطیلی ۴۸ باشد، اگر دو داده به داده های دسته وسط اضافه شوند، مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی چه تغییری می کند؟ (طول هر دسته = ۳ = c)

۲۶) اگر به داده های آماری با نمودار چندبر فراوانی روبه رو داده ۲۹ و ۳۲ افزوده شود. درصد فراوانی نسبی در دسته وسط داده های جدید کدام است؟



۲۷) اگر دسته دوم در یک جدول فراوانی (۱۶، ۱۲) باشد. طول نقطه ششم و هفتم در نمودار چندبر فراوانی را بدست آورید.

۲۸) نمودار چند بر فراوانی برای چه متغیرهایی مناسب بوده و محور طول ها و عرض ها به ترتیب در این نمودار چه می باشند؟

۲۹) در یک نمونه گیری سامانمند از بین ۴۰۰ نفر، ۲۰ نفر به عنوان نمونه می خواهیم. اگر این ۴۰۰ نفر دارای شماره های ۱ تا ۴۰۰ باشند و شماره ۱۷۲ انتخاب شده باشد، ۵ نفر اول که انتخاب شده اند چه شماره ای دارد؟

۳۰) بر آورد نقطه ای پارامتر جامعه را تعریف کنید و افزایش تعداد اعضای نمونه تصادفی چه تأثیری در بر آورد دارد؟

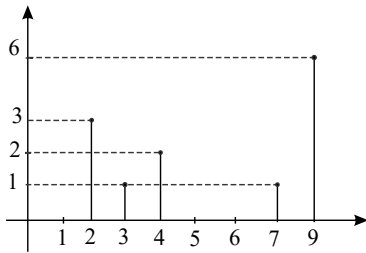
۳۱) در یک نمونه ۱۶۹ عضوی انحراف معیار میانگین داده های بر آورد شده برابر با ۴٫۲ می باشد. انحراف معیار خود داده ها چند است؟

۳۲) در جامعه ای با انحراف معیار ۰٫۳ و نمونه ۴۰۰ عضوی برای بر آورد میانگین، طول بازه ای که به اطمینان ۹۵ درصد، میانگین عضو این بازه می باشد را بدست آورید.

۳۳) تفاوت های سرشماری با نمونه گیری چیست؟

۳۴) در نمونه گیری طبقه ای با ۵ طبقه به اندازه های ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ و ۴۰ اگر بخواهیم نمونه ما ۵۰ عضوی باشد از طبقه وسط چند عضو به صورت تصادفی انتخاب می شود؟

۳۵ در داده‌های با میانگین \bar{x} و انحراف معیار σ ، اگر به هر یک از داده‌ها \bar{x} اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات قبلی است؟



۳۶ با توجه به نمودار میله‌ای روبه‌رو مطلوب است: الف) میانگین

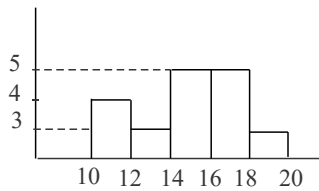
ب) واریانس

ج) انحراف معیار

۳۷ در دوازده داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

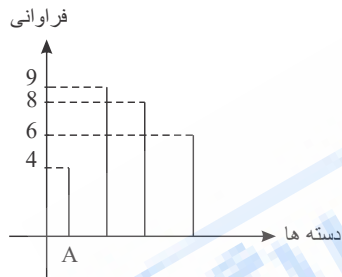
۳۸ میانگین ۵۰ داده دسته‌بندی شده با روش سریع را بدست آورید.

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
f	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰



۳۹ با توجه به نمودار بافت نگاشت متقابل واریانس تمام داده‌ها را بدست آورید.

۴۰ شکل مقابل نمودار میله‌ای داده‌ها در ۴ دسته است در نمودار دایره‌ای زاویه مرکزی دسته D چند درجه است؟



۴۱ واریانس ۱۱ داده آماری صفر است اگر داده‌های ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند انحراف معیار ۱۴ داده حاصل را بدست آورید.

۴۲ کارکنان یک شرکت برحسب نوع فعالیت خود با ۵ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای مربوط به کارکنان این شرکت زاویه مرکزی متناظر با کد ۳ چند درجه است؟

کد	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۳۵	۴۰	۶۰	۳۰	۳۵

۴۳ مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۳۴۰ می‌باشد انحراف معیار کدام است؟

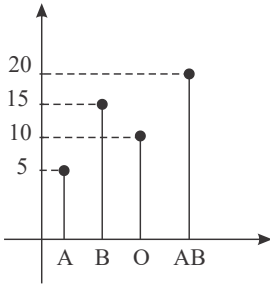
۴۴ اگر σ انحراف معیار x_1, x_2, \dots, x_n باشد، انحراف معیار داده‌های $(-x_1 + 1), (-x_2 + 1), \dots, (-x_n + 1)$ کدام است؟ میانگین چه تغییری می‌کند؟

۴۵ در داده‌های آماری ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۱، ۱۷، ۲۰، ۱۹، ۱۷، ۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۹، ۲۳، ۱۸، ۲۰، دامنه میان‌چارکی را بدست آورید.

۴۶ در یک نمونه‌گیری از ۵۰۰ اتومبیل در حال حرکت از نظر تعداد سرنشینان جدول زیر را تهیه کردیم. اختلاف میانگین سرنشینان از مُد را بدست آورید.

تعداد سرنشینان	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی نسبی	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱۵	۰٫۲۵	۰٫۳

۴۷) با توجه به نمودار زیر که گروه خونی ۵۰ دانش آموز را نشان می دهد چند درصد از دانش آموزان گروه خونی A یا B دارند.



۴۸) جدول مقابل مقادیر انحراف از میانگین داده های آماری دسته بندی شده را مشخص می کند، فراوانی نسبی دسته چهارم کدام است؟

انحراف از میانگین	-۳	-۱	۱	۳	۵
فراوانی	۵	۷	۴	x	۳

۴۹) ۸۰ داده آماری در ۷ طبقه، دسته بندی شده اند. طبقه اول بصورت $۱۵ - ۱۱$ و فراوانی نسبی دسته وسط ۱۰ می باشد. اگر ۱۳ داده کوچک تر از

۱۹ و ۱۲ داده بزرگ تر از ۳۱ به دسته ها اضافه کنیم فراوانی مطلق و فراوانی نسبی دسته وسط کدام است؟

۵۰) در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد، چقدر است؟

۵۱) تاسی را آنقدر پرتاب می کنیم تا عدد ۴ ظاهر شود احتمال پیشامد A که در آن اولین عدد ۴ در سومین پرتاب ظاهر شود.

۵۲) احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می آید سالم است؟

۵۳) دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا هر دو زوج بیایند. با چه احتمالی با کمتر از چهار پرتاب این اتفاق می افتد؟

۵۴) اعداد ۱ تا ۶ بر روی ۶ کارت یکسان نوشته شده اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون بیاوریم با چه احتمالی جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

۵۵) دو تاس همگن را انداخته ایم. اگر حاصل جمع شماره های روشده کمتر از ۶ باشد احتمال اینکه شماره حداقل یکی از تاس های رو شده ۲ باشد چقدر است؟

۵۶) فرزند اول خانواده ای دختر است. با چه احتمالی دو فرزند دیگر این خانواده پسر است؟

۵۷) در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند. دو نفر از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر اولی فوتبالیست باشد، احتمال اینکه دومی نیز فوتبالیست باشد چقدر است؟

۵۸) یک شرکت بسته بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A و B و C به ترتیب ۳۰ و ۴۵ و ۲۵ است. می دانیم یک درصد محصولات A و دو درصد محصولات B و ۴ درصد محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین محصولات انتخاب کنیم احتمال سالم بودن آن کدام است؟

۵۹) یک تاس همگن را انداخته ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ظاهر شده ۲ باشد چقدر است؟

۶۰) از ساکنین شهری ۳۰ درصد روزنامه الف، ۲۵ درصد روزنامه ب و ۹ درصد روزنامه های الف و ب را می خوانند اگر فردی از بین آنان به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال هیچ یک از دو روزنامه را نمی خواند؟

۶۱) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند $P(A \cap B')$ را به ساده ترین شکل بنویسید. (برحسب اشتراک دو پیشامد)

۶۲) در یک خانواده ۳ فرزندی می دانیم فرزند اول آنها دختر است. با کدام احتمال لاقول یکی از فرزندان پسر است؟

۶۳) در خانواده ای با ۳ فرزند، چقدر احتمال دارد فقط دو فرزند اول پسر باشند؟

۶۴) در ظرفی ۱۰ گوی یکسان با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ قرار دارد. یک گوی خارج کرده شماره آن را یادداشت می کنیم و برمی گردانیم. سپس گوی دیگری خارج کرده، شماره آن را در سمت راست رقم قبلی می نویسیم. با چه احتمالی عدد حاصل بزرگ تر از ۵۵ است؟

۶۵) احتمال اینکه اشخاص A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند ۰/۶ و ۰/۷ است. با کدام احتمال حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نمی کنند؟

۶۶) سکه همگنی را سه بار به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A رخ دادن پشت در پرتاب اول و B پیشامد رخ دادن رو در پرتاب سوم باشد، نشان دهید A و B مستقل‌اند.

۶۷) در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش، آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان به‌طور تصادفی انتخاب شوند، با چه احتمالی حداقل بر روی یکی از آن دو، آزمون مهارت انجام شده است؟

۶۸) دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه خارج می‌کنیم. با چه احتمال مهره اول سفید و مهره دوم سیاه است؟

۶۹) کدام تعریف درست بیان شده است؟

۱) شتافت جامعه معلوم از روی نمونه نامعلوم کار علم آمار است.

۲) فضای نمونه پرتاب ۸ تاس 6^8 عضو خواهد داشت.

۳) با آمدن ۲ در پرتاب تاس پیشامد $\{2, 4\}$ رخ داده است ولی پیشامد $\{2, 3, 4\}$ رخ نداده است؟

۷۰) کدام یک از موارد زیر مربوط به علم احتمال و کدام مربوط به علم آمار است؟

الف) می‌دانیم، در جعبه‌ای ۵۰ سیب فاسد و ۱۰ سیب سالم وجود دارد. چند سیب از جعبه برداریم که حداقل یک سیب سالم باشد. (ب) درآمد هنرمندان سینما.

۷۱) از دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵٪ علاقه‌مند به ورزش و ۴۵٪ علاقه‌مند به موسیقی هستند و فقط ۱۲٪ به هر دو رشته علاقه دارند. اگر فردی به تصادف از این کلاس انتخاب شود با چه احتمالی به هیچ‌کدام علاقه ندارد؟

۷۲) در ظرفی ۵ مهره زرد و ۴ مهره بنفش قرار دارد. از این ظرف ۳ مهره به تصادف پی‌درپی و با جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. الف) چقدر احتمال دارد مهره‌ها زرد باشند؟

ب) اگر مهره‌ها را بدون جای‌گذاری برداریم چقدر احتمال دارد مهره‌ها زرد باشند؟

۷۳) درستی تساوی‌های زیر را با کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

۱) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

۲) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

۳) $B - (B - A) = A \cap B$

۴) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

۷۴) گزاره بودن جملات زیر را بررسی کنید و در صورت گزاره بودن ارزش آن را تعیین کنید.

الف) رضا بیماری کیبوی دارد یا ناراحتی قلبی ندارد.

ب) چه هوای مطبوعی

ج) $x^2 = 4$

د) چنین نیست که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

۷۵) کامل کنید.

۱) جملات خبری که دارای ارزش درست یا نادرست باشند نامیده می‌شوند.

۲) جمله‌ای خبری که دارای یک یا چند متغیر است و ارزش آن بر ما معلوم نیست نام دارد.

۳) گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی درست است که مجموعه‌جواب

۷۶) اگر $A = \{x | x \in R, x^2 - 5x + 6 = 0\}$ و $B = \left\{ \frac{1}{3^x} | x \in Z, -1 \leq x \leq 1 \right\}$ باشد، $B^c - A^c$ را به کمک اعضا و روی

محورهای مختصات نمایش دهید.

۷۷) اگر $A_n = (-n, n + 1)$ باشد، $\bigcup_{n=1}^3 A_n$ و $\bigcap_{n=1}^3 A_n$ را بنویسید.

۷۸) اگر $A_i = \left[\frac{-2}{i}, \frac{2}{i} \right]$ باشد، $\bigcap_{i=1}^5 A_i$ و $\bigcup_{i=1}^5 A_i$ را بنویسید.

۷۹) مجموعه‌های A و B و C را به گونه‌ای تعریف کنید که: $A \in B$ ، $B \in C$ ، $A \in C$

۸۰) اگر $A = \{x \mid x \in Z, |x| \leq 1\}$ باشد. مطلوب است:

الف) مجموعه A به کمک اعضا

ب) تعداد زیرمجموعه‌های A

ج) مجموعه توانی A

د) درستی یا نادرستی احکام زیر:

۱) $-1 \notin A$

۲) $\{1, \{-1\}\} \in P(A)$

۳) $P(P(A)) = 16$

۸۱) اگر p و q دو گزاره باشند ثابت کنید $(p \vee q) \sim p \wedge \sim q$ (جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌ها را رسم کنید).

۸۲) ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $\forall x \in R, x^2 \geq x$

۲) $\exists x \in R, x^2 = x$

۳) $\forall x \in R, |x| > x$

۴) $\nexists x \in R, x^3 < x$

۸۳) جدول ارزشی زیر مربوط به چه گزاره‌ای است؟

p	q	\neg
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

۸۴) گزاره‌های زیر را با کمک سور (\exists, \forall) به زبان ریاضی بنویسید.

۱) برای هر عدد حقیقی معکوس آن نیز حقیقی است.

۲) عدد حقیقی وجود دارد که مکعب آن با خودش برابر است.

۸۵) اگر $M = \{x \mid x \in N, x \leq 15\}$ و $A = \{x \in M \mid 3 \leq x + 2 < 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 9\}$ و $C = \{x \in M, |x| < 3\}$

آنگاه درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $A - B = A \cap B'$

۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۳) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۸۶) فرض کنید $A = \{1, \{1, 3\}\}$ و $B = \{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$ باشند. آن‌گاه $A \times B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۷) فرض کنیم جامعه‌ای از ۶ نفر تشکیل شده است که درآمد ماهیانه آن‌ها بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

۴	۱	۲	۰	۵	۳
---	---	---	---	---	---

الف. پارامتر چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب. آیا براساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟

۸۸) عبارت‌های مربوط به هم را با یک خط به یکدیگر متصل کنید.

الف. مقادیری که به ازای آن‌ها یک گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل شود.	۱. نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری شانس برابری برای انتخاب دارند.
ب. داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد.	۲. شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های
پ. نمونه‌گیری احتمالی	جمع‌آوری شده معلوم
ت. علم آمار	۳. مجموعه جواب
	۴. مد

۸۹ عبارت‌های مربوط به هم را با یک خط به یکدیگر متصل کنید.

الف. مجموعه مقادیری که بتوان آن‌ها را جای متغیر قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود.	۱. زیرمجموعه‌هایی از A که تهی نباشند و اشتراکی نداشته باشند و اجتماع آن‌ها برابر A باشد.
ب. افراز	۲. علم آمار
پ. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه	۳. دامنه متغیر
ت. شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های	۴. مجموعه توانی
جمع آوری شده معلوم	

۹۰ یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج آمد دوباره تاس می‌ریزیم و اگر فرد آمد دو بار سکه پرتاب می‌کنیم. نمودار درختی فضای نمونه‌ای را رسم کنید. پیشامد آن را بنویسید که سکه ۲ بار پشت بیاید.

فایده‌های بی‌شمار

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\bar{x} = \frac{3 \times 6 + 2 \times 8 + a \times 10 + 6 \times 12 + 1 \times 14}{3 + 2 + a + 6 + 1} = \frac{10a + 120}{a + 12} = 10$$

$$\sigma^2 = 6 = \frac{3(6-10)^2 + 2(8-10)^2 + a(10-10)^2 + 6(12-10)^2 + 1(10-14)^2}{a+12}$$

$$\Rightarrow 6a + 72 = 96 \Rightarrow a = 4$$

۲ الف

$$n(A) = \binom{5}{2} \binom{7}{1} = 70 \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$$

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

ب

$$n(B) = \binom{5}{3} = 10 \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

۳

A = پیشامد سیاه بودن هر دو مهره

B = پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره

الف

$$n(S) = \binom{16}{2} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$n(A) = \binom{9}{2}$$

ب

$n(B)$ = حالت‌های هر دو مهره زرد + حالت‌های هر دو مهره سیاه

$$n(B) = \binom{9}{2} + \binom{7}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{2} + \binom{7}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{36 + 21}{120} = \frac{57}{120} = \frac{19}{40}$$

۴

A = گرم و سرد = {دما}

B = خشک و مرطوب = {رطوبت}

C = نمی‌وزد و می‌وزد = {باد}

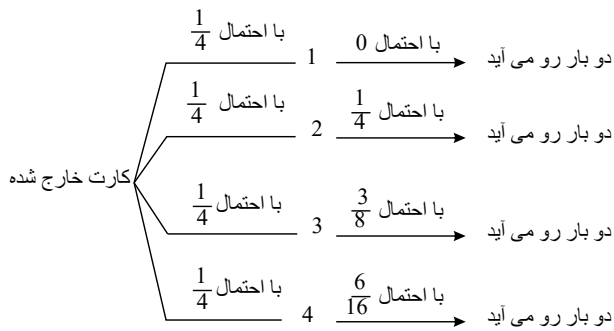
D = نیمه ابری و ابری و صاف = {هوا}

E = نیوده یا بوده = {بارندگی}

$$\rightarrow n(S) = \underbrace{n(A)}_2 \cdot \underbrace{n(B)}_2 \cdot \underbrace{n(C)}_2 \cdot \underbrace{n(D)}_3 \cdot \underbrace{n(E)}_2 \rightarrow n(S) = 48$$

۵

طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{دو بار آمدن}) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{16} = \frac{1}{4} \left(\frac{6+6+4}{16} \right)$$

$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{دو بار رو آمدن} \mid \text{خارج شدن شماره ۳}) = \frac{P(\text{خارج شدن شماره ۳} \cap \text{دو بار آمدن})}{P(\text{دو بار رو آمدن})} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم. (۶)

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{-1, 0, 1\}$$

$$E = \{0, 1, 2\} \Rightarrow m(m^2 - 3m + 2) = m(m-1)(m-2) = 0$$

با توجه به محاسبات فوق $A = B = D$ می‌باشد و $E = C$ می‌باشد.

مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی برابر با مساحت زیر نمودار مستطیلی است و چون عرض تمام این مستطیل‌ها برابر طول هر دسته است. پس: (۷)

$$\underbrace{S}_{\text{طول هر دسته مساحت زیر نمودار}} = \underbrace{C}_{18+x} \times \sum f_i = 3(4 + 5 + x + 6 + 3) = 72$$

$$18 + x = 24 \rightarrow x = 6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{P(A) \cdot P(B)} = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$$

حالت‌های مجموع ۶ عبارت‌اند از: (۳, ۳), (۲, ۴), (۵, ۱) (۹)

(۲, ۴) و (۱, ۵) از نظر رنگ مهره‌ها هر کدام ۴ حالت دارند چون هر مهره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. اما (۳, ۳) فقط یک حالت دارد. پس در مجموع $9 = 4 + 4 + 1$ حالت داریم.

ما حالت‌های هم‌رنگ را می‌خواهیم یعنی: (۱, ۵) سفید، (۱, ۵) سیاه، (۲, ۴) سفید، (۲, ۴) سیاه

$$\Rightarrow P = \frac{4}{9}$$

(۱۰)

پیشامد هم‌جنس بودن همه بچه‌ها $A = \{(د, د), (د, د), (د, د)\}$ $n(S) = 2^3 = 8$ الف)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8} \quad A = \{(د, د), (د, د), (د, د)\}$$

ب) $B =$ پیشامد حداقل ۲ دختر بودن

$$B = \{(د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

ج) $C =$ پیشامد دختر بودن فرزند اول

$$C = \{(د, د), (د, پ), (پ, د), (پ, پ)\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

د) $D =$ پیشامد حداکثر ۲ فرزند پسر بودن

$$D = \{(د, د), (د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

الف

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$$

ت

$$\exists x = 2k, 2k = 3a$$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma = 1,9 \quad n = 25$$

$$22 - \frac{2 \times 1,9}{5} \leq \mu \leq 22 + \frac{2 \times 1,9}{5} \Rightarrow 21,24 \leq \mu \leq 22,76$$

$$\mu \in [21,24, 22,76]$$

$$p = \frac{16}{100}$$

$$\text{بازه } 95 \text{ درصدی} = \left[p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$\left[\frac{16}{100} - 2 \times \sqrt{\frac{\frac{16}{100} \times \frac{84}{100}}{100}}, \frac{16}{100} + 2 \times \sqrt{\frac{\frac{16}{100} \times \frac{84}{100}}{100}} \right]$$

$$\approx \left[\frac{16}{100} - \frac{73}{1000}, \frac{16}{100} + \frac{73}{1000} \right] = [0,087, 0,233]$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{100} \rightarrow 200 \leq \sqrt{n} \rightarrow 40000 \leq n$$

ب برای بعضی مقادیر اعداد طبیعی x داریم: $x = 2k + 1$

پ به ازای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 + 5x = 0$

ب) طول بازه ۹۵ درصدی برای نسبت واقعی برابر با $\frac{2}{\sqrt{n}}$ است.

یعنی حداقل باید ۴۰۰۰۰ نمونه داشته باشیم.

۱۴ هر دو نمودار

نمودار میله‌ای



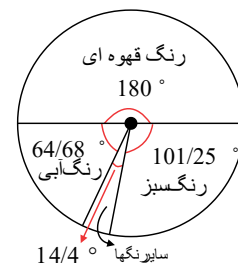
$$\text{زاویه مربوط به رنگ سبز} = \frac{36}{128} \times 360^\circ = 101,25^\circ$$

$$\text{زاویه مربوط به رنگ آبی} = \frac{23}{128} \times 360^\circ = 64,68^\circ$$

$$\text{زاویه مربوط به رنگ قهوه‌ای} = \frac{64}{128} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\text{زاویه مربوط به سایر رنگها} = \frac{5}{125} \times 360^\circ = 14,4^\circ$$

نمودار دایره‌ای



۱۵ البته در صورت سؤال باید میانگین بالاترین دما خواسته می شود.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{n} = \frac{55 + 27 + 29 + 32 + 28 + 31 + 29}{7} = \frac{231}{7} = 33$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{n} = \frac{۴۳ + ۴۲ + ۴۵ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۸}{۶} = ۴۴,۵$$

$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۹۴۰ & ۱۰۵۰ \\ ۱۲۷۰ & ۱۳۸۰ \end{pmatrix} \xrightarrow{\div 2} \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۳۵ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

طبق جدول آبی $۴۵۰ < ۴۷۰ < ۴۹۵$
 طبق جدول سبزی $۴۵۰ < ۴۷۰ < ۴۹۵$
 طبق جدول صورتی $۴۵۰ < ۴۷۰ < ۴۹۵$
 طبق جدول صورتی $۴۵۰ < ۴۷۰ < ۴۹۵$



→ شکل حاصل

$A =$ مهره اول قرمز
 مستقل اند A و B →

$B =$ مهره دوم قرمز

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب

$C =$ پیشامد حداقل یک مهره آبی بودن

$$P(C') = \frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۴}{۹} \rightarrow P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

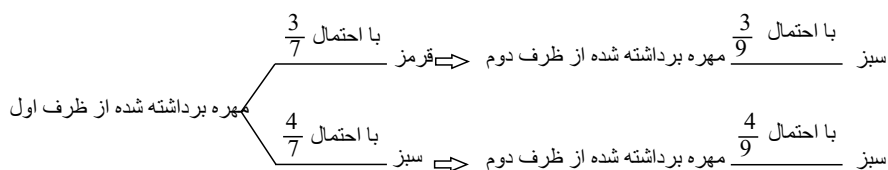
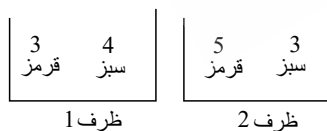
پ

$$P(\text{هر دو مهره زرد} \mid \text{هر دو مهره آبی لهر دو مهره قرمز}) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$$

۱۹ اگر A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A \cap B) = ۰$

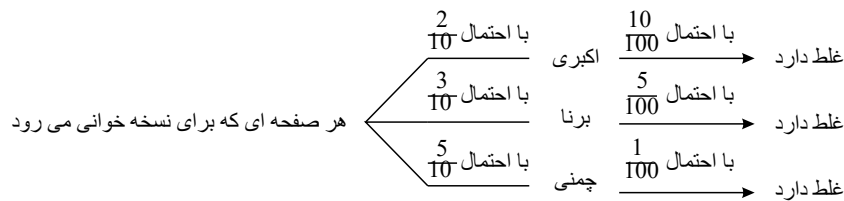
ولی اگر بخواهند مستقل باشند $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. پس اگر بخواهند هم مستقل هم ناسازگار باشند، باید یکی از $P(A)$ یا $P(B)$ برابر صفر باشد که با توجه به ناهمی بودن A و B این اتفاق نمی افتد.

طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{سبز بودن مهره برداشته شده}) = \frac{۳}{۹} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۹}{۶۳} + \frac{۱۶}{۶۳} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{غلط داشتن هر صفحه}) = \frac{10}{100} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{20 + 15 + 5}{1000} = \frac{40}{1000} = \frac{4}{100}$$

$$P(\text{غلط داشتن} \cap \text{نسخه خوانی خانم اکبری}) = \frac{P(\text{غلط داشتن} | \text{نسخه خوانی خانم اکبری})}{P(\text{غلط داشتن})}$$

$$= \frac{\frac{2}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{4}{100}} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{1}{2}$$

۲۲

الف) $\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup A' \subseteq X \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{array} \right\} \Rightarrow U = X$

درست است.

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cap B') \cup (A \cap B)}_{\text{توزیع پذیری}} = A \cap \underbrace{(B \cup B')}_{U} = A$

درست است.

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \xrightarrow{\text{از سمت چپ به راست}}$

$(A - C) \cap (B - C) = \underbrace{(A \cap C') \cap (B \cap C')}_{\text{شرکت پذیری}} = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$

درست است.

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$\underbrace{(A \cap B')}_{\text{توزیع پذیری}} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{\text{توزیع پذیری}} = \underbrace{[(A \cap B') \cup B]}_{A \cup B} \cap \underbrace{[(A \cap B') \cup A']}_{B' \cup A'}$
 $= (A \cup B) \cap (B' \cup A') = A \cup B - (B' \cup A')' = (A \cup B) - (A \cap B)$

درست است.

ث) $\underbrace{(A \cup B) \cap (A' \cap B')}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{\text{توزیع پذیری}} \cap B' = \underbrace{[(A' \cap A) \cup (A' \cap B)]}_{\emptyset} \cap B' = \underbrace{\emptyset}_{A' \cap B}$

$= \underbrace{(A' \cap B) \cap B'}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{(B' \cap B) \cap A'}_{\emptyset} = \emptyset$

درست است.

ج) نادرست است زیرا اگر $A = B = \emptyset$ و $C = \{1\}$ در نظر بگیریم در شرایط صدق می کند اما $B \neq C$ می باشد.

۲۳) به دو دسته ۱- در دسترس ۲- بدون برنامه ریزی

۲۴

جامعه = x

آماره = y

۲۵

مساحت زیر نمودار مستطیلی با مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی با هم برابر می باشند؛ مساحت زیر نمودار مستطیلی جدید برابر است با:

$48 + 3 \times 2 = 48 + 6 = 54$
 \downarrow
 ۲ داده افزایش یافته

پس مساحت چندبر فراوانی جدید نیز ۵۴ می شود.

۲۶) ابتدا با توجه به نمودار جدول فراوانی داده های متناظر با نمودار را سم کنید.

حدود دسته	۲۲٫۵ - ۲۵٫۵	۲۵٫۵ - ۲۸٫۵	۲۸٫۵ - ۳۱٫۵	۳۱٫۵ - ۳۴٫۵	۳۴٫۵ - ۳۷٫۵
فراوانی	۹	۱۱	۱۲	۱۰	۸

از دو داده اضافه شده فقط ۲۹ در دسته وسط قرار می گیرد و با اضافه شدن آن فراوانی ۱۳ می شود و فراوانی کل $52 = (9 + 11 + 12 + 10 + 8) + 2$ است.

پس درصد فراوانی نسبی دسته وسط:

$$\frac{13}{52} \times 100 = 25$$

۲۷) در نمودار چندبر فراوانی طول نقاط مراکز دسته‌ها می‌باشد.

$$x = \frac{12 + 16}{2} = 14 \text{ مرکز دسته دوم طول سومین نقطه در نمودار می‌باشد.}$$

پس طول ششمین نقطه برابر است با: $14 + 3 \times 4 = 26$

و طول هفتمین نقطه در نمودار چندبر فراوانی: $14 + 4 \times 4 = 30$

۲۸) از نمودار چندبر فراوانی برای متغیرهای کمی پیوسته استفاده می‌کنیم و روی محور x مراکز دسته‌ها و روی محور y فراوانی دسته‌ها را مشخص می‌کنیم.

۲۹)

$$\frac{400}{20} = 20 \rightarrow \text{یعنی دسته‌ها ۲۰ نفری است}$$

$$\begin{array}{r|l} 172 & 20 \\ 160 & 8 \\ \hline 12 & \end{array} \rightarrow \text{یعنی از هر دسته شماره عددی انتخاب می‌شود که باقی‌مانده‌اش به ۲۰ برابر ۱۲ باشد.}$$

$$\underbrace{12}_{12}, \underbrace{12+20}_{32}, \underbrace{12+40}_{52}, \underbrace{12+60}_{72}, \underbrace{12+80}_{92}$$

۳۰) بر آورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جایگذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامتر. افزایش نمونه سبب می‌شود تا پارامتر بر آورد شده به پارامتر اصلی نزدیک‌تر باشد.

۳۱)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4,2 = \frac{\sigma}{\sqrt{169}} \Rightarrow \sigma = 13 \times 4,2 = 54,6$$

۳۲)

$$\underbrace{\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}_a < \underbrace{\mu}_{\text{میانگین واقعی}} < \underbrace{\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}_b \quad (\text{البته با اطمینان ۹۵})$$

$$b - a = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{4 \times 0,3}{2} = \frac{0,6}{10} = \frac{6}{100}$$

۳۳) در سرشماری موضوعی را روی تمام اعضای جامعه انجام می‌دهیم ولی در نمونه‌گیری آن موضوع خاص را فقط روی نمونه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳۴)

$$\text{وسط} = \frac{30}{150} \times 50 = 10$$

۱۰ نفر از طبقه وسط انتخاب خواهند شد.

۳۵)

اگر به همه داده‌ها مقدار \bar{x} اضافه شود، $\bar{x} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x}$ می‌شود اما σ تغییر نمی‌کند.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} \Rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{1}{2} CV_{\text{قدیم}}$$

۳۶)

$$\text{الف) } \bar{x} = \frac{3 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 7 + 6 \times 9}{3 + 2 + 1 + 1 + 6} = 6$$

$$\text{ب) } \sigma^2 = \frac{3(2-6)^2 + 1(3-6)^2 + 2(4-6)^2 + 1(7-6)^2 + 6(9-6)^2}{3 + 1 + 2 + 1 + 6} = \frac{120}{13}$$

$$\text{ج) } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{120}{13}}$$

۳۷)

$$\text{میانگین داده‌ها} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{12}}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{12}^2}{12} - \bar{x}^2 = \frac{480}{12} - 6^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۳۸) میانگین فرضی را $y = 123$ در نظر می‌گیریم و $x - 123$ را بدست می‌آوریم.

$x - 123$	-13	-7	-1	5	11
f	5	8	15	12	10

میانگین داده‌ها را با توجه به جدول اخیر بدست می‌آوریم:

$$A = \frac{5(-13) + 8(-7) + 15(-1) + 12(5) + 10(11)}{5 + 8 + 15 + 12 + 10} = \frac{34}{50} = \frac{68}{100}$$

میانگین واقعی:

$$\bar{x} = y + A = 123 + 0,68 = 123,68$$

۳۹) از روی نمودار بافت نگاشت جدول فراوانی داده‌ها شامل مرکز دسته و فراوانی را مشخص می‌کنیم.

مرکز دسته	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
فراوانی	۴	۳	۵	۵	۳

۱۵ - x را بدست می‌آوریم و واریانس داده‌های جدید با واریانس داده‌های اولیه برابر است.

$x - 15$	-۴	-۲	۰	۲	۴
f	۴	۳	۵	۵	۳

$$\bar{x} = \frac{4(-4) + 3(-2) + 5(0) + 5(2) + 3(4)}{4 + 3 + 5 + 5 + 3} = 0$$

واریانس داده‌ها با میانگین صفر برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{4(-4-0)^2 + 3(-2-0)^2 + 5(0-0)^2 + 5(2-0)^2 + 3(4-0)^2}{20} = 7,2$$

(راه‌حل دیگری بدون وجود تشکیل فراوانی جدید وجود دارد.)

۴۰)

$$n = 6 + 8 + 9 + 4 = 27$$

$$\theta_D = \frac{f_D}{n} \times 360^\circ = \frac{6}{27} \times 360^\circ = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

۴۱) اگر واریانس داده‌های آماری برابر صفر باشد، آنگاه داده‌ها همگی با هم برابر و در نتیجه میانگین داده‌ها نیز برابر همین داده‌های مساوی خواهد بود.

با اضافه کردن داده‌های ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ به ۱۱ داده اولیه با میانگین این سه عدد یعنی $\frac{3}{24 + 16 + 26} = 22$ برابر است. بنابراین داده‌ها بصورت زیر خواهد بود:

داده‌ها	۲۲	۱۶	۲۴	۲۶
فراوانی	۱۱	۱	۱	۱

$$\sigma^2 = \frac{11(22-22)^2 + 1(16-22)^2 + (24-16)^2 + (26-16)^2}{14}$$

$$\sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

۴۲) اگر n فراوانی کل، f فراوانی در کد ۳ و a اندازه زاویه متناظر با کد ۳ در نمودار دایره‌ای باشد آنگاه $a = \frac{f}{n} \times 360$ می‌باشد. داریم:

$$f = 60 \quad \text{و} \quad n = 35 + 40 + 60 + 30 + 35 = 200$$

$$\Rightarrow a = \frac{60}{200} \times 360 = 108^\circ$$

۴۳) با توجه به فرمول واریانس $(\bar{x})^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$ داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{f_0} = 100 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{f_0}}{f_0} = \frac{100}{40} = 2,5$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{f_0}^2 = 340 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{f_0}^2}{f_0} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{340}{40} - (2,5)^2 = 8,5 - 6,25 = 2,25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$$

۴۴) میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n را برابر \bar{x} فرض می‌کنیم.

پس میانگین داده‌های جدید $1 - x_1, -x_2 + 1, \dots, -x_n + 1$ برابر با $1 - \bar{x}$ است. ولی طبق نکات درس‌نامه اگر داده‌ها $ax_i + b$ شوند واریانس داده‌ها $|a|$ برابر می‌شود که در

این سؤال $|a| = 1$ برابر می‌شود.

پس واریانس تغییری نکرده و میانگین قرینه و یک واحد افزوده می‌شود.

۴۵) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و چارک‌های اول و سوم را بدست می‌آوریم. دامنه میان‌چارکی برابر $Q_3 - Q_1$ است.

۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۱۹, ۲۰, ۲۰, ۲۱, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۳	
↓	↓
Q_1	Q_3

$$Q_3 - Q_1 = 21 - 17 = 4$$

۴۶) مد، داده با بیش‌ترین فراوانی است فراوانی نسبی داده ۵ از همه بیشتر است بنابراین فراوانی مطلق این داده از همه بیش‌تر است و بنابراین مد داده‌ها بر ۵ می‌باشد از طرفی با توجه به

فرمول میانگین از روی جدول فراوانی نسبی داریم:

$$\bar{x} = 0,1 \times 1 + 0,2 \times 2 + 0,15 \times 3 + 4 \times 0,25 + 0,3 \times 5 = 3,45$$

اختلاف مد و میانگین: $5 - 3,45 = 1,55$

(۴۷)

$$B \text{ یا } A \text{ درصد گروه خونی} = \frac{5 + 15}{50} \times 100 = \%40$$

(۴۸) مجموع انحراف از میانگین تمام داده‌ها برابر صفر است.

$$f_1(x_1 - \bar{x}) + \dots + f_k(x_k - \bar{x}) = 0$$

$$5(-3) + 7(-1) + 4(1) + x(3) + 3(5) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین فراوانی نسبی دسته چهارم برابر $\frac{1}{20}$ می‌باشد.

(۴۹) با توجه به اینکه طبقه اول بصورت $[11, 15)$ می‌باشد طول دسته‌ها برابر $C = 15 - 11 = 4$ و در نتیجه دسته‌ها بصورت

$[11, 15)$ $[15, 19)$ $[19, 23)$ $[23, 27)$ $[27, 31)$ $[31, 35)$ $[35, 39)$ می‌باشد. فراوانی نسبی دسته وسط برابر $\frac{1}{8}$ است، پس:

$$n = 80 \Rightarrow f_F = n \times 0,1 = 80 \times 0,1 = 8$$

$$\underbrace{[11, 15)}_{13 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[15, 19)}_{12 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[19, 23)}_{12 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[23, 27)}_{12 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[27, 31)}_{12 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[31, 35)}_{12 \text{ داده اضافه شده}} \underbrace{[35, 39)}_{12 \text{ داده اضافه شده}}$$

۲۵ داده اضافه شده است که هیچ یک در وسط قرار نمی‌گیرد بنابراین فراوانی نسبی دسته وسط همان ۸ و تعداد کل داده‌ها برابر $105 = 80 + 25$ است. بنابراین:

$$\text{فراوانی نسبی جدید دسته وسط} = \frac{8}{105}$$

(۵۰) مجموع ۶ شامل این حالت‌هاست:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 5$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(۵۱) اگر اولین چهار بخواهد در سومین پرتاب ظاهر شود پس باید دو پرتاب اول غیر از چهار بیایند و معلوم است این سه پیشامد نسبت به هم مستقل‌اند:

$$A = \text{پیشامد ۴ آمدن در پرتاب اول} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

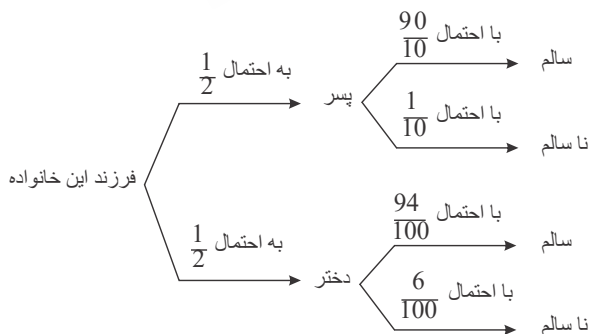
$$B = \text{پیشامد ۴ آمدن در پرتاب دوم} \rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$C = \text{پیشامد ۴ آمدن در پرتاب سوم} \rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$$

چون مستقل‌اند

$$\rightarrow P(A' \cap B' \cap C) = P(A') \cdot P(B') \cdot P(C) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$$

(۵۲) طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{مسالم بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{90}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{94}{100} = \frac{184}{200}$$

(۵۳) در این مسئله باید در پرتاب اول یا دوم یا سوم هر دو زوج آید.

با توجه به پیشامدهای تعریف شده:

$$\left. \begin{aligned} A &= \text{پیشامد زوج آمدن هر دو در پرتاب اول} \\ B &= \text{پیشامد زوج آمدن هر دو در پرتاب دوم} \\ C &= \text{پیشامد زوج آمدن هر دو در پرتاب سوم} \end{aligned} \right\} \rightarrow P(A) + P(A \cap B') + P(A \cap B' \cap C')$$

ولی در این مسئله $\frac{1}{4} = \frac{9}{36} = P(A) = P(B) = P(C)$ است و می‌دانیم A و B و C مستقل‌اند:

$$P(A) + P(A \cap B') + P(A \cap B' \cap C') = P(A) + P(A) \cdot P(B') + P(A)P(B')P(C')$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{16 + 12 + 9}{64} = \frac{37}{64}$$

۵۴

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

مجموع دو کارت زمانی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. پس:

۵۵) حالت‌های مجموع کمتر از ۶ را می‌نویسیم.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

پس در کل ۱۰ حالت داریم. حالا می‌خواهیم حداقل یک تاس ۲ باشد که این ۵ حالت‌اند.

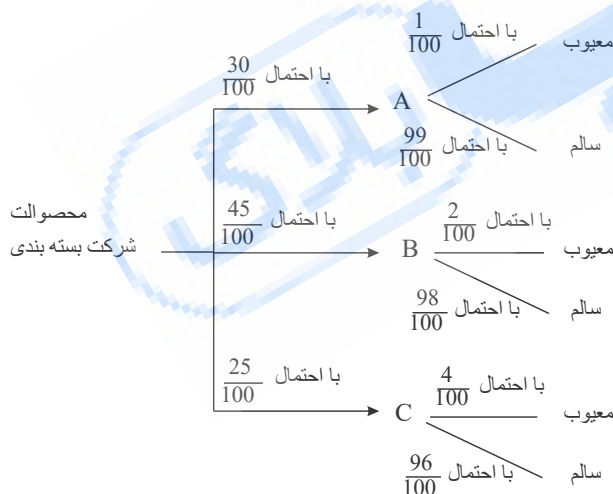
$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

۵۶) چون پیشامد فرزندان از هم مستقل‌اند، کاری به فرزند اول نداریم و احتمال پسر بودن دو تای دیگر $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ است.

۵۷) اگر اولی فوتبالبست باشد یکی از فوتبالبست‌های کلاس حذف شده پس در انتخاب دومی یک کلاس ۳۹ نفری با ۶ فوتبالبست داریم. بنابراین احتمال فوتبالبست بودن دومی $\frac{6}{39} = \frac{2}{13}$ است.

۵۸) طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{سالم بودن}) = \frac{30}{100} \times \frac{99}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{98}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{9780}{10000}$$

به بیان درصد می‌شود ۹۷٫۸ درصد.

۵۹) برآمد حاصل از بین اعداد ۵ و ۴ و ۲ و ۱ است. و ما می‌خواهیم ۲ باشد. پس:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{الف و ب}) = 1 - P(\text{الف یا ب}) = 1 - [P(\text{الف}) + P(\text{ب}) - P(\text{الف و ب})] \\ = 1 - (0.3 + 0.25 - 0.09) = 1 - 0.46 = 0.54$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۶۰

۶۱

۶۲) وضعیت فرزند اول مشخص است. بنابراین ما می‌خواهیم فرزند دوم پسر باشد یا فرزند سوم پسر باشد یا هر دو کل حالات ممکن برای فرزند دوم و سوم به شکل زیر است:

$$\rightarrow S = \{(دختر دختر), (دختر پسر), (پسر دختر), (پسر پسر)\}$$

بنابراین احتمال مورد نظر $\frac{3}{4}$ است.

۶۳) فقط دو فرزند اول پسر باشند یعنی فرزند سوم باید دختر باشد. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(\text{اولی پسر}) \times P(\text{دومی پسر}) \times P(\text{سومی دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۶۴) برای عدد اول یعنی عدد سمت چپ، ۱۰ حالت داریم. و چون گوی را دوباره به ظرف برمی‌گردانیم برای عدد دوم هم ۱۰ حالت داریم. بنابراین تعداد کل حالات برابر اصل ضرب برابر

است با:

$$n(S) = 10 \times 10 = 100$$

حالات مورد نظر ما حالاتی است که عدد حاصل بیشتر از ۵۵ باشد. یعنی از ۵۶ تا ۹۹ را می‌خواهیم.

$$n(A) = 99 - 55 = 44$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{44}{100} = 0,44$$

۶۵) سؤال دربارهٔ این است که A یا B ناراحتی قلبی پیدا نکنند پس ابتدا احتمال اینکه هر کدام ناراحتی قلبی بگیرد را حساب می‌کنیم.

$$P(A \text{ ناراحتی قلبی پیدا کند}) = 1 - P(A \text{ ناراحتی قلبی نگیرد}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(B \text{ ناراحتی قلبی پیدا کند}) = 1 - P(B \text{ ناراحتی قلبی نگیرد}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

احتمال اینکه حداقل یکی ناراحتی بگیرد می‌شود:

$$P((A \text{ ناراحتی قلبی نگیرد}) \cup (B \text{ ناراحتی قلبی نگیرد})) \\ = 0,4 + 0,3 - (0,4 \times 0,3) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$$

راه حل دوم:

می‌خواهیم حداقل یک نفر ناراحتی قلبی بگیرد. یعنی فقط می‌خواهیم هر دو بیمار نشوند. پس احتمال هر دو بیمار شوند را حساب می‌کنیم و سپس از اصل متمم استفاده می‌کنیم.

$$P(\text{هر دو ناراحتی بگیرند}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

$$P(\text{حداقل یکی ناراحتی نگیرد}) = 1 - 0,42 = 0,58$$

۶۶)

$A =$ پیشامد پشت آمدن در پرتاب

$B =$ پیشامد رو آمدن در پرتاب سوم

در ۳ بار پرتاب سکه

$$n(S) \rightarrow 8 = 2^3$$

$$n(A) = \boxed{\text{حالت ۱}} \times \boxed{\text{حالت ۲}} \times \boxed{\text{حالت ۲}} = \text{حالت ۴} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

رو بیابید

$$n(B) = \boxed{\text{حالت ۲}} \times \boxed{\text{حالت ۲}} \times \boxed{\text{حالت ۱}} = \text{حالت ۴} \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

رو بیابید

$$n(A \cap B) = \boxed{\text{حالت ۱}} \times \boxed{\text{حالت ۲}} \times \boxed{\text{حالت ۱}} = \text{حالت ۲} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

رو بیابید

چون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ پیشامدهای A و B مستقل‌اند.

۶۷) کل حالات انتخاب دو تا از ۷ موش است.

$$n(S) = \binom{7}{2} = 21$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = (3 \times 4) + 3 = 15$$

رو دو مورد و روی یکی آزمون انجام شده
آزمون واقع شده‌اند و روی دیگری نه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

سؤال می‌خواهد بر روی یکی یا هر دو موش آزمون انجام شده باشد.

۶۸)



$P(\text{مهرة اول سفید} | \text{مهرة دوم سیاه}) = P(\text{مهرة اول سفید}) \times P(\text{مهرة دوم سیاه})$

$$= \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} \times \frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

غ (۱) ۶۹

✓ (۲)

غ (۳)

الف علم احتمال ۷۰

ب علم آمار

۷۱

$A =$ پیشامد علاقه‌مند بودن به ورزش

$B =$ پیشامد علاقه‌مند بودن به موسیقی

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{100} + \frac{45}{100} - \frac{12}{100} = \frac{58}{100}$$

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{58}{100} = \frac{42}{100}$$

۷۲

$A =$ پیشامد زرد بودن سه مهره

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1}}{\binom{9}{1} \binom{9}{1} \binom{9}{1}} = \frac{125}{729}$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{9}{1} \binom{8}{1} \binom{7}{1}} = \frac{60}{504}$$

۷۳

$$۱) (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') \rightarrow [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$\left[(A \cup B) \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U \right] \cap \left[\underbrace{(A' \cup A)}_U \cap (A' \cup B') \right]$$

$$\rightarrow (A \cup B) \cap \underbrace{(A' \cup B')}_{(A \cap B)'} \rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) \quad \checkmark$$

$$۲) \underbrace{(A \cap B')}_{\uparrow} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{\uparrow} \cup (A \cap B) = \left(A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U \right) \cup (B \cap A') \rightarrow A \cup (B \cap A')$$

$$\rightarrow (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_{\uparrow} = (A \cup B) \quad \checkmark$$

$$۳) B \cap (B \cap A')' \Rightarrow B \cap (B' \cup A) = \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \cup (B \cap A) = B \cap A \quad \checkmark$$

$$۴) \left[\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B) \right] \cup \left[(B \cap A') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \right]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap \underbrace{(A \cup A')}_{\text{مرجع}} = B$$

ارزش معلوم نیست - گزاره (الف)

ب) ×

ج) ×

۷۴

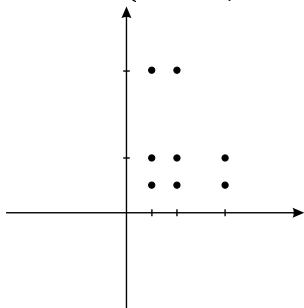
ارزش نادرست است - گزاره د)

$$A = \{2, 3\} \quad B = \left\{2, 1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$B^r = B \times B = \left\{(2, 2)(2, 1)(2, \frac{1}{2})(1, 2)(1, 1)(1, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, 2)(\frac{1}{2}, 1)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}$$

$$A^r = A \times A = \{(2, 2)(2, 3)(3, 2)(3, 3)\}$$

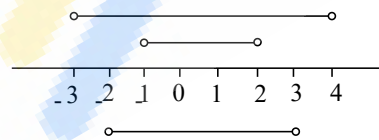
$$B^r - A^r = \left\{(2, 1)(2, \frac{1}{2})(1, 2)(1, 1)(1, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, 2)(\frac{1}{2}, 1)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}$$



$$A_1 = (-1, 2) \quad A_2 = (-2, 4) \quad A_3 = (-3, 8)$$

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = (-3, 8)$$

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = (-1, 2)$$



$$A_1 = [-2, 2] \quad A_2 = [-1, 1] \quad A_3 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad A_4 = \left[-\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right] \quad A_5 = \left[-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right]$$

$$\bigcap_{i=1}^5 A_i = \left[-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right] \quad \bigcup_{i=1}^5 A_i = [-2, 2]$$

$$A = \{1\}$$

$$B = \{\{1\}, 5\} \quad C = \{1, \{\{1\}, 5\}, 6\}$$

الف) $A = \{-1, 0, 1\}$

ب) زیرمجموعه‌ی $2^A = 8$

ج) $P(A) = \{\emptyset, \{-1, 0, 1\}, \{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0\}, \{1, 0\}\}$

د) ۱) غ ۲) غ ۳) غ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

۱) غ ۲) ✓ ۳) غ ۴) غ

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$\sim(p \wedge q)$

۱) $\forall x \in R, \frac{1}{x} \in R$ درست ✓

۲) $\exists x \in R, x^x = x$ ✓
 $x = 1$
 $x = 0$
 $x = -1$

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

$$3 \leq x + 2 < 7 \rightarrow 1 \leq x < 5 \rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 9\}$$

$$|x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3 \rightarrow C = \{1, 2\}$$

۸۴

۸۵

عبارت ۱:

$$A - B = \{1, 3\} \quad B' = \{1, 5, 3, 7, 8, 10, \dots, 15\}$$

$$A \cap B' = \{1, 3\}$$

عبارت ۲:

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap (\{2, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 6, 9\} = \{1, 2, 4\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\}$$

بنابراین $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

عبارت ۳:

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{2, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4, 6, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

$$(A \cup B) \cup C = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 9\}) \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

پس $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

گزینه ۴، ۸۶

الف. میانگین درآمد ۸۷

$$\text{میانگین درآمد} = \frac{4 + 1 + 2 + 0 + 5 + 3}{6} = \frac{15}{6} = 2,5$$

ب. خیر

۱. پ ۲. ت ۳. الف ۴. ب ۸۸

۱. ب ۲. ت ۳. الف ۴. پ ۸۹

۹۰

با استفاده از نمودار درختی، فضای نمونه‌ای و سپس پیشامد موردنظر را تعیین می‌کنیم:

