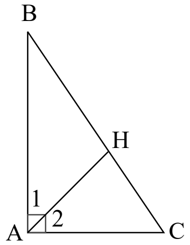
نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری:

نام آزمون: هندسه پایه دهم رشته ریاضی

تاریخ آزمون:

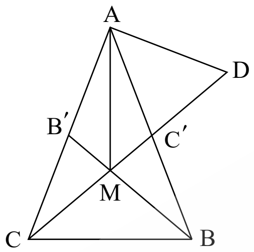
۱) دو خط متقاطع $d$ و $d'$ را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $O$ (محل تقاطع) به فاصلهٔ $5cm$ بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

۲) در شکل مقابل $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 \neq \hat{C}$ . به‌روش غیرمستقیم (برهان خلف) ثابت کنید $AH$ عمود بر $BC$ نیست.

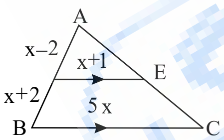


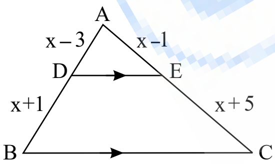

۳) ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر ارتفاع مثلث می‌شود.

۴) در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ محل تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ $B$ و $C$ را $M$ و نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ $C$ با عمودی که در نقطهٔ $A$ بر $AC$ رسم شده است را نقطهٔ $D$ می‌نامیم. ثابت کنید مثلث $AMD$ متساوی‌الساقین است.

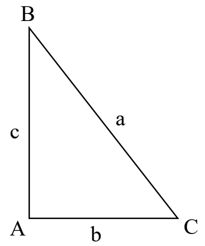



۵) در شکل‌های زیر، $DE||BC$ است. مقادیر $x$ را در دو شکل به‌دست آورید.



۶) با قضیهٔ فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ $A$ از مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

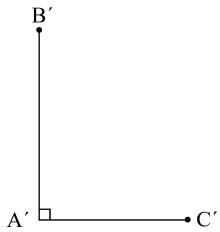



الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر، نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث $ABC$ داده‌شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل، به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.




۳) با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید.

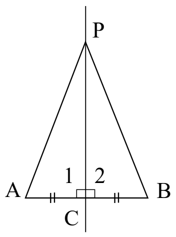
۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید: $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیهٔ فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دوشرطی بیان نمایید.

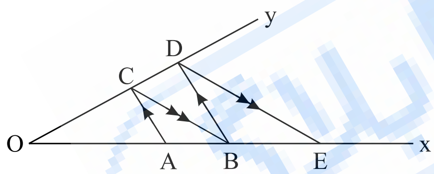
۷) فرق استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی را بیان کنید.

۸) یک ذوزنقه رسم کنید که اندازهٔ دو قاعدهٔ آن ۴ و ۹ سانتی‌متر و دو ساق آن ۵ و ۶ سانتی‌متر باشند.

۹) ثابت کنید هر نقطه مانند $P$ روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$ از نقاط $A$ و $B$ به یک فاصله است.




۱۰) بر ضلع $Ox$ از زاویهٔ $x\hat{O}y$ دو نقطهٔ $A$ و $B$ را اختیار کرده و از این نقاط دو خط موازی هم رسم می‌کنیم تا ضلع $Oy$ را به‌ترتیب در نقاط $C$ و $D$ قطع کنند و از نقطهٔ $D$ خطی موازی $BC$ رسم می‌کنیم تا ضلع $Ox$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. ثابت کنید:




$OB^2 = OA \times OE$

۱۱) در مثلث $ABC$، $\hat{A} = 120^\circ$ و نیمسازهای داخلی زاویهٔ $A$ ضلع $BC$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند.

ثابت کنید: $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

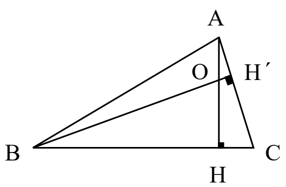
۱۲) مجموع تعداد اضلاع، تعداد قطرها و تعداد محورهای تقارن یک $n$ضلعی منتظم برابر ۳۶ است. مجموع زاویه‌های داخلی، مجموع زاویه‌های خارجی و اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی و اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی آن را به دست آورید.

۱۳) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ را به دست آورید.

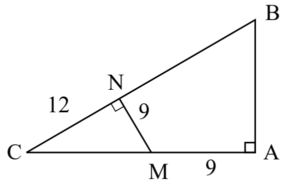
۱۴) ثابت کنید از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع پدید می‌آید.

۱۵) عکسی را که ابعاد آن ۴ و ۶ سانتی‌متر است، بزرگ کرده‌ایم. اگر به عرض $10cm$ اضافه شده باشد، طول جدید را به‌دست آورید.

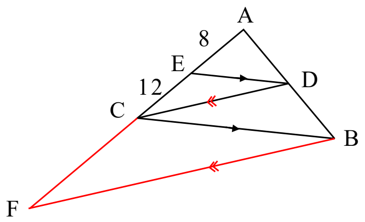
۱۶) در شکل مقابل، $AH$ و $BH'$ دو ارتفاع مثلث هستند، اگر $AH' = 5OH' = 12$ و $OH = 3AH'$ باشد، طول $BH$ را به‌دست آورید.



**۱۷** در شکل مقابل، محیط چهارضلعی $ABNM$ را به‌دست آورید.



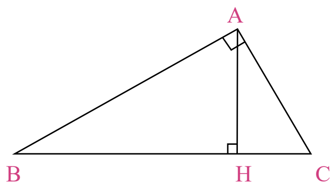

**۱۸** در شکل مقابل، $BC \parallel ED$ و $BF \parallel DC$ و $AE = ۸$ و $CE = ۱۲$، اندازهٔ $CF$ را به‌دست آورید.




**۱۹** میانگین هندسی دو عدد $۳\sqrt{۵}$ و $۱۲\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

**۲۰** اگر $\frac{۷}{۵} = \frac{x}{y}$ , $\frac{۳}{۸} = \frac{y}{z}$ باشد، حاصل $\frac{x}{z}$ را به‌دست آورید.

**۲۱** در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ ( $A = ۹۰^\circ$ ) ارتفاع $AH$ را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده‌شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.




۱) $BH = ۹,\ CH = ۴, AH =?, AB =?, AC =?$

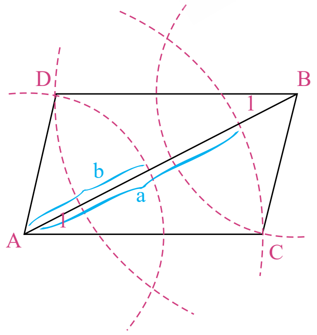
۲) $AB = ۱۰,\ BC = ۱۲, AC =?, AH =?$

۳) $AB = ۸,\ AC = ۶, BH =?, CH =?$

۴) $AB = ۸,\ AH = ۴, BC =?, AC =?$

**۲۲** متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

**۲۳** مطابق شکل، پاره‌خط $AB$ داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک‌بار به اندازهٔ $a$ و بار دیگر به اندازهٔ $b$ باز می‌کنیم و از نقطهٔ $A$ دو کمان می‌زنیم (به‌طوری که مجموع $a$ و $b$ از اندازهٔ $AB$ بزرگ‌تر باشد). سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ $B$ می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را $C$ و $D$ می‌نامیم. چهارضلعی $ACBD$ چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های $ABC$ و $ABD$ و زوایای $A_1$ و $B_1$ نسبت به‌هم چگونه‌اند.)

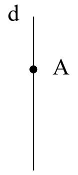



**۲۴** می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

**۲۵** عکس قضیهٔ زیر را بیان کنید و سپس در صورت امکان آن‌را دوشرطی بنویسید و در صورت غیرممکن بودن مثال نقض بیاورید.

قضیه: «دو زاویهٔ قائمه مکمل هستند.»

۲۶) مرکز تمام دایره‌هایی را پیدا کنید که در نقطهٔ $A$ بر خط $d$ مماس باشند.



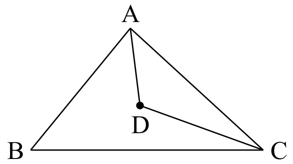

۲۷) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ سانتی‌متر و یک ضلع آن $7cm$ باشد.

۲۸) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

۲۹) ثابت کنید در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیهٔ نامساوی مثلث‌ها)

۳۰) نقطهٔ دلخواه $D$ درون مثلث $ABC$ قرار دارد، ثابت کنید:

حکم: $A\hat{D}C > \hat{B}$




۳۱) قضیهٔ فیثاغورس را به‌صورت قضیهٔ شرطی و سپس به‌صورت قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

۳۲) هریک از مثلث‌ها را با اطلاعات داده‌شده رسم کنید.

الف) $\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ BC = 6cm \\ \hat{B} = 40^\circ \end{cases}$

ب) $\widehat{M} = 90^\circ \ , \ NP = 8cm \ , \ MN = 5cm$

۳۳) مثلثی را رسم کنید که $AB = 5cm$ و $AC = 6cm$ دو ضلع و $AM = 4cm$ میانهٔ وارد بر ضلع سوم آن مثلث باشند.

۳۴) مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که طول قاعدهٔ آن $5cm$ و ارتفاع وارد بر ساق آن $4cm$ است.

۳۵) مثلث $ABC$ را با داشتن $\hat{B} = \alpha$ و $BC = a$ و $AM = m_a$ رسم کنید.

۳۶) مثلث $ABC$ را با داشتن $BC = 8cm$ و $AH = 5cm$ (ارتفاع) و $AM = 7cm$ (میانه) رسم کنید.

۳۷) در مثلث $ABC$، $AD$ نیمساز زاویهٔ $A$ است و $AD = 4cm$. اگر زاویه‌های $B\hat{D}A$ برابر $60^\circ$ و $B\hat{A}D$ برابر $35^\circ$ باشند، مثلث را ترسیم کنید.

۳۸) یک لوزی ترسیم کنید که طول اقطار آن برابر $6cm$ و $10cm$ باشد.

۳۹) مثلث $ABC$ را که در آن ضلع $BC = 8cm$ و میانهٔ $BM = 6cm$ و میانهٔ $CN = 9cm$ است را رسم کنید.

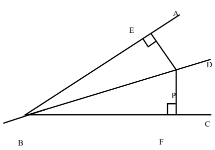
۴۰) هریک از مثلث‌های زیر را با اطلاعات داده شده رسم کنید.

الف) $\overset{\triangle}{ABC} : \begin{cases} AB = 5cm \\ \hat{A} = 60^\circ \\ \hat{B} = 40^\circ \end{cases}$

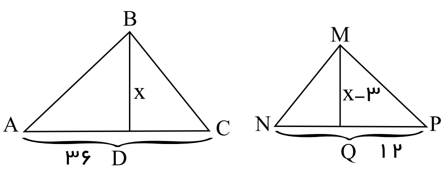
ب) $\overset{\triangle}{MNP} : \begin{cases} \widehat{M} = 90^\circ \\ NP = 5cm \\ \widehat{N} = 30^\circ \end{cases}$

ج) $\overset{\triangle}{RST} : \begin{cases} RS = 3cm \\ RT = 5cm \\ \hat{R} = 50^\circ \end{cases}$

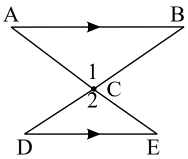
۴۱) نشان دهید که هر نقطه مانند $P$ روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$، از ضلع های $AB$ و $BC$ به یک فاصله است.



۴۲) در مثلث‌های زیر، $BD$ و $MQ$ نیمسازهای دو زاویهٔ $B$ و $M$ هستند. اگر دو مثلث متشابه باشند، مقدار $x$ را به‌دست آورید.

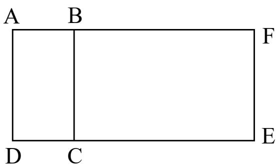


۴۳) در شکل مقابل، $AB||DE$، $\frac{۴}{۷}=\frac{AC}{AE}$ است. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث را به‌دست آورید.

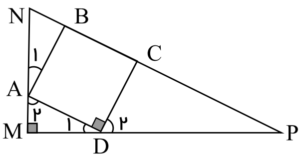



۴۴) نسبت تشابه دو $n$ضلعی منتظم برابر $\frac{۳}{۴}$ است. نسبت محیط‌ها، نسبت اضلاع و نسبت مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.

۴۵) در شکل مقابل، دو مستطیل $ABCD$ و $BCEF$ متشابهند. اگر $AB=۱$ و $AD=۳$ باشد، مساحت هرکدام از مستطیل‌ها را به‌دست آورید.




۴۶) در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است که در داخل مثلث قائم‌الزاویهٔ $MNP$ محاط شده است. در شکل، چند جفت مثلث متشابه وجود دارد؟



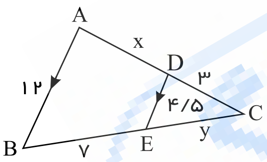

۴۷) مثلث $ABC$ که اندازه‌های دو زاویهٔ آن $۳۵^\circ$ و $۶۵^\circ$ است با کدام‌یک از مثلث‌های زیر می‌تواند متشابه باشد؟ چرا؟

الف) مثلثی که اندازه‌های دو زاویهٔ آن $۸۰^\circ$ و $۳۵^\circ$ باشد.

ب) مثلثی که اندازه‌های دو زاویهٔ آن $۶۵^\circ$ و $۸۵^\circ$ باشد.

۴۸) دو مربع متشابه هستند و نسبت تشابه آنها $\frac{۲}{۵}$ است. اگر ضلع یکی از آنها برابر $۲۰cm$ باشد، ضلع دیگری را به‌دست آورید.

۴۹) در شکل زیر، $DE||AB$؛ مقادیر $x$ و $y$ را به‌دست آورید.




۵۰) اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{۲x-y}{x+y}$ باشد، حاصل تناسب‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{x}{y}$

ب) $\frac{x+y}{x-y}$

ج) $\frac{۳x-۲y}{۲x-۳y}$

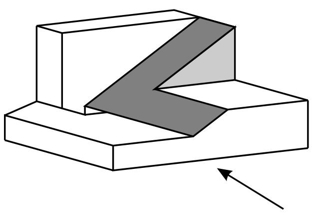
۵۱) مقادیر $x$ و $y$ را در تناسب‌های زیر به‌دست آورید.

الف) $\frac{۲x-۱}{x+۱}=\frac{۲}{۳}=\frac{x+y-۱}{y}$

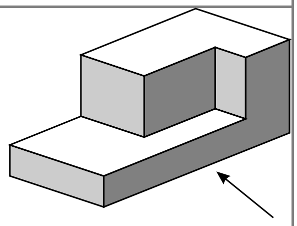
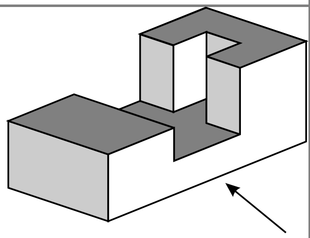
ب) $\frac{x+۱}{۴}=\frac{۳}{x+۲}=\frac{|y|}{۸}$

۵۲) ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع اگر قطرها برهم عمود باشند آنگاه لوزی می‌شود.

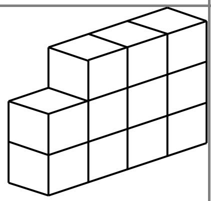
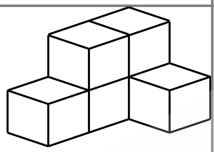
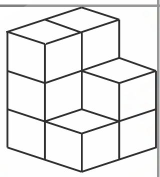
۵۳) برای شکل مقابل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



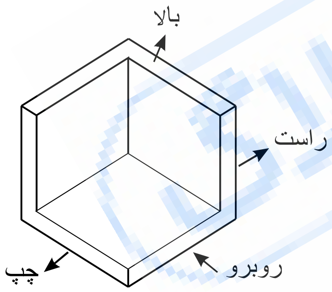
**۵۴** در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.

| «الف» | «ب» |
|---|---|
|  |  |

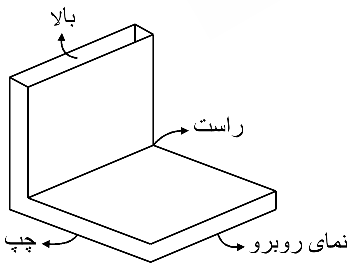
**۵۵** سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن را رسم کنید.

| نمای روبه‌رو | نمای بالا | نمای چپ | |
|---|---|---|---|
| | | |  |
| | | |  |
| | | |  |

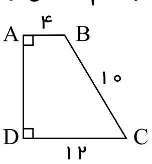
**۵۶** نمای بالا، روبه‌رو، چپ و راست جسم مقابل را رسم کنید.



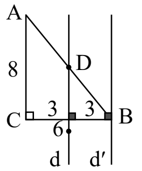

**۵۷** نمای بالا، روبه‌رو، چپ و راست جسم مقابل را رسم کنید.




**۵۸** ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر را یک بار حول قاعدهٔ $AB$ و بار دیگر حول قاعدهٔ $DC$ و بار سوم حول ساق $AD$ دوران می‌دهیم. حجم اجسام حاصل را به دست آورید.

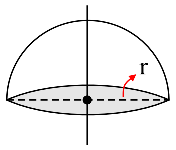


۵۹) مثلث $ABC$ را یک بار حول خط $d$ و یک بار حول خط $d'$ دوران داده‌ایم. حجم اجسام حاصل را به دست آورید.

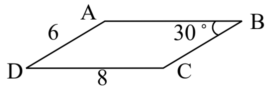



۶۰) مثلث $ABC$ با طول اضلاع ۱۵ و ۱۲ و ۹ را حول بزرگ‌ترین ضلع دوران داده‌ایم، حجم فضای اشغال‌شده را حساب کنید.

۶۱) نیم‌دایره‌ای به شعاع $6cm$ را حول شعاع عمود بر قطر آن دوران داده‌ایم، حجم فضای اشغال‌شده را محاسبه کنید.




۶۲) متوازی‌الاضلاع زیر را حول ضلع بزرگ آن دوران می‌دهیم. حجم فضای اشغال‌شده را به دست آورید.




۶۳) مربعی به ضلع $a$ را یک بار حول ضلع و یک بار حول قطر دوران داده‌ایم. حجم اجسام حاصل را به دست آورید.

۶۴) صفحه‌ای یک کره را قطع می‌کند و با مرکز کره $5cm$ فاصله دارد اگر شعاع کره $13cm$ باشد.

الف) مساحت سطح مقطع را به دست آورید.

ب) اگر مرکز کره را به نقاط قطع‌شده وصل کنیم، حجم جسم فضایی حاصل را به دست آورید.

۶۵) صفحه‌ای یک مکعب را طوری قطع کرده است که بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن ایجاد شده است. اگر طول یال مکعب $12cm$ باشد مساحت سطح مقطع را به دست آورید.

۶۶) از برش یک کره توسط یک صفحه چه شکلی حاصل می‌شود؟

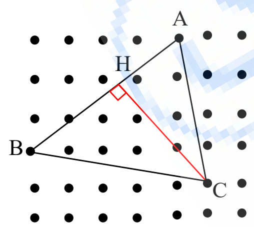
۶۷) کره‌هایی یکسان را به‌صورت یک هرم مربع‌القاعده روی هم چیده‌ایم. اگر قاعدهٔ این هرم یک مربع با تعداد هفت کره در یک ضلع باشد، تعداد کل کره‌ها را به دست آورید.

۶۸) ثابت کنید که در یک هرم مثلثی، وسط یال‌ها، در یک صفحهٔ موازی صفحهٔ قاعده قرار دارند.

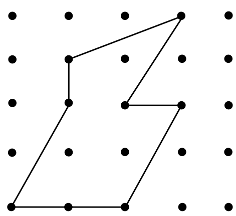
۶۹) اگر نقطهٔ $A$ هم در صفحهٔ $P$ و هم در صفحهٔ $Q$ باشد دو صفحهٔ $P$ و $Q$ چه وضعیتی دارند؟

۷۰) حالت‌های مختلف دو صفحه در فضا را مشخص کنید.

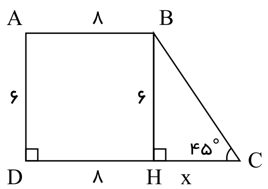
۷۱) در شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ $C$ از ضلع $AB$ را به دست آورید. (فاصلهٔ نقاط از هم به‌صورت افقی و عمودی یک واحد است.)




۷۲) در شکل زیر فاصلهٔ تمام نقطه‌ها به‌صورت افقی و عمودی ۳ واحد است. مساحت چندضلعی را به دست آورید.



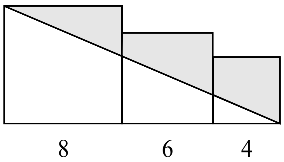
۷۳) مساحت و محیط ذوزنقهٔ زیر را با اطلاعات داده‌شده به دست آورید.



(۷۴) اگر محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۳۶ و ارتفاع وارد بر قاعده ۶ باشد، مساحت مثلث را به دست آورید.

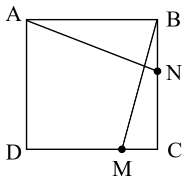
(۷۵) در یک مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مثلث $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر است. زاویه‌های مثلث را به دست آورید.

(۷۶) هر سه چهارضلعی زیر مربع هستند مساحت قسمت هاشورخورده را به دست آورید.

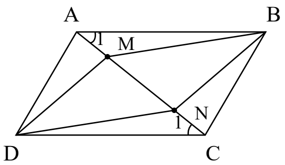



(۷۷) ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند برابر نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن است.

(۷۸) چهارضلعی $ABCD$ مربع است. اگر $BN = CM$ باشد ثابت کنید $AN = BM$ و $AN \perp BM$




(۷۹) در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. اگر $AM = CN$ باشد، ثابت کنید $MBND$ متوازی‌الاضلاع است.



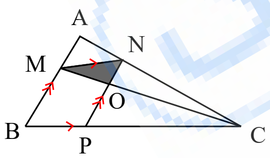

(۸۰) مجموع تعداد قطرها و اضلاع یک چندضلعی ۱۲۰ تاست. تعداد اضلاع، مجموع زاویه‌های داخلی و مجموع زاویه‌های خارجی آن را به دست آورید.

(۸۱) چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. نقطهٔ $A$ را به $E$ وسط $BC$ و نقطهٔ $C$ را به $F$ وسط $AD$ وصل کرده‌ایم. ثابت کنید $AECF$ متوازی‌الاضلاع است.

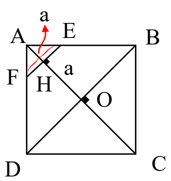
(۸۲) تعداد قطرهای یک $n$ضلعی محدب، ۵۴ تاست. مجموع زاویه‌های داخلی آن را به دست آورید.

(۸۳) نیمسازهای زاویه‌های یک ذوزنقه را رسم می‌کنیم و از برخوردشان یک چهارضلعی به دست می‌آید، این چهارضلعی دارای چه ویژگی‌ای است؟

(۸۴) در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$ است. نسبت مساحت مثلث هاشورخورده به متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را به‌دست آورید.

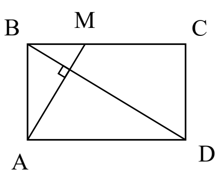



(۸۵) در شکل زیر، $O$ مرکز تقارن مربع و $OH = EF$ می‌باشد. اگر طول ضلع مربع $۲۰cm$ باشد، مقدار $OH$ را به‌دست آورید.

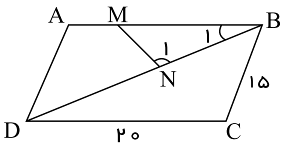



(۸۶) محیط دو $n$ضلعی منتظم (با تعداد اضلاع برابر) $۴۰cm$ و $۶۰cm$ است. اگر مجموع مساحت‌های آنها $cm^۲$ باشد، مساحت هرکدام را به‌دست آورید.

(۸۷) در شکل مقابل، $ABCD$ مستطیل است و $AD = ۳AB$ و $AM \perp BD$ ، نسبت $BC$ به $BM$ را به‌دست آورید.

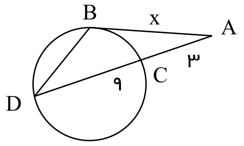


۸۸) در متوازی‌الاضلاع روبه‌رو، $\hat{N}_۱ = \hat{A}$، $NB = ۱۲$، $DC = ۲۰$ و $BC = ۱۵$؛ اندازهٔ پاره‌خط $MN$ را به‌دست آورید.

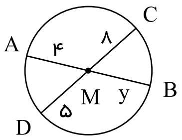



۸۹) در شکل‌های زیر، مقادیر مجهول را به‌دست آورید.

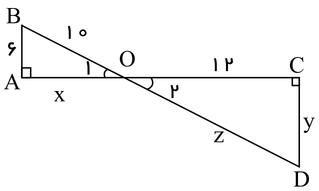
الف)



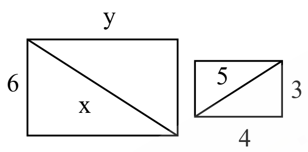

ب)



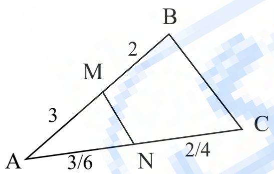

۹۰) در شکل مقابل، مقادیر $x$، $y$ و $z$ را محاسبه کنید.




۹۱) دو مستطیل مقابل متشابهند، مقادیر $x$ و $y$ را به‌دست آورید. $(y > ۶)$



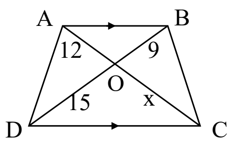

۹۲) با توجه به شکل مقابل، آیا $MN \parallel BC$ است؟ چرا؟



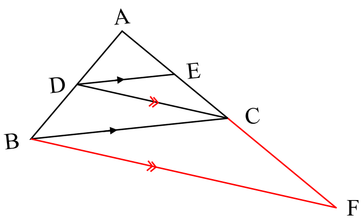

۹۳) در مستطیلی که ابعاد آن ۶ و ۸ سانتی‌متر است، نیمساز دو زاویهٔ روبه‌روی هم، قطر مقابل را در دو نقطه قطع می‌کنند. فاصلهٔ این دو نقطه را محاسبه کنید.

۹۴) در ذوزنقهٔ مقابل، طول $OC$ را به‌دست آورید. (در هر ذوزنقه برای محل برخورد قطرها رابطهٔ زیر برقرار است):

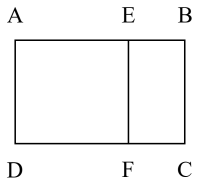
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$




۹۵) در شکل مقابل، $BC \parallel DE$ و $BF \parallel DC$؛ ثابت کنید: $\frac{AC}{CF} = \frac{AE}{EC}$.



۹۶ اگر نسبت طول به عرض مستطیل بزرگ با نسبت طول به عرض در مستطیل کوچک برابر باشند، این نسبت را به دست آورید. (چهار ضلعی $AEFD$ مربع است)



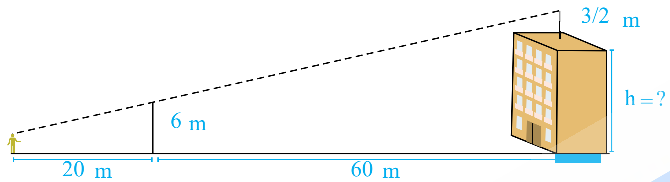

۹۷ اگر $\frac{۴}{۳} = \frac{۱۵x - ۳y}{۲x + ۵y}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ را محاسبه کنید.

۹۸ ثابت کنید در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها با عکس نسبت اضلاع متناظر آنها برابر است.

۹۹ واسطهٔ هندسی بین دو عدد $۵^۳ \times ۳^۴ \times ۲$ و $۳^۳ \times ۱۵ \times ۸$ را به‌دست آورید.

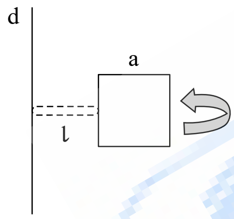
۱۰۰ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصلهٔ ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصلهٔ ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بینند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند و از قضیهٔ تالس کمک بگیرید)




۱۰۱ طول اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

۱۰۲ مربعی به ضلع $a$ را حول محور $d$ دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.




۱۰۳ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

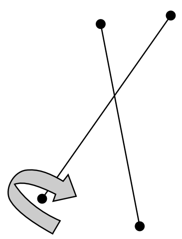
الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن:

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه:

پ) دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها:

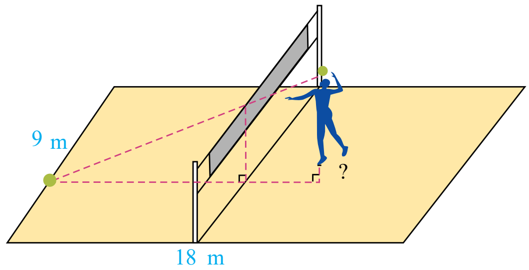
ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ آن:

۱۰۴ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



۱۰۵ دو کره با شعاع‌های $r$ و $r'$ یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از این دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

**۱۰۶** ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹ × ۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲٫۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است، با ضربهٔ آبشار مماس بر تور وسط روانهٔ زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟

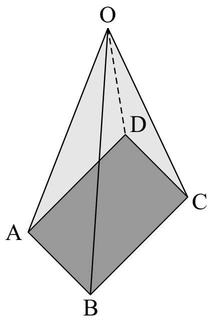



**۱۰۷** قاعدهٔ هرمی، مستطیل $ABCD$ است. رأس این هرم را $O$ نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ $P$ را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

الف) صفحهٔ $P$ بر ارتفاع هرم عمود باشد.

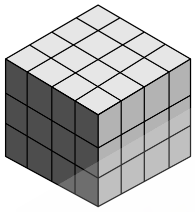
ب) صفحهٔ $P$ از $O$ بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

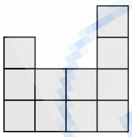
ج) صفحهٔ $P$ از $O$ نگذرد؛ ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.



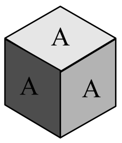

**۱۰۸** شکل روبه‌رو از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟

حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟





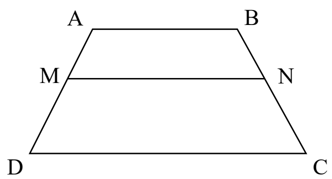
**۱۰۹** روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف $A$ نوشته شده است. هشت تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم، چند حرف $A$ دیده می‌شود؟




**۱۱۰** در ذوزنقهٔ مقابل، $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

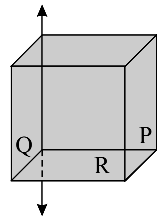
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید)

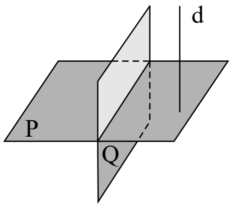



**۱۱۱** مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد، در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

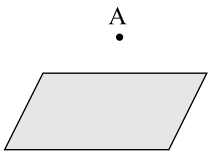
**۱۱۲** دو صفحهٔ متقاطع $P$ و $Q$ بر صفحهٔ $R$ عمود هستند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ $R$ چه وضعیتی دارد؟



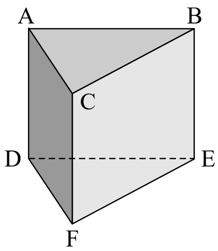

**۱۱۳** دو صفحهٔ $P$ و $Q$ برهم عمود هستند و خط $d$ نیز بر صفحهٔ $P$ عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ $Q$ چه وضعی دارد؟




**۱۱۴** از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟




**۱۱۵** منشور سه‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:




الف) سه جفت خط متمایز دوبه‌دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دوبه‌دو متنافر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دوبه‌دو متقاطع نام ببرید.

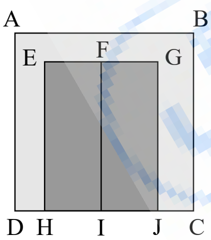
د) سه خط همرس نام ببرید.

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید.

و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.

ز) سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع نام ببرید.

**۱۱۶** شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.




الف) وضعیت صفحات $EFIH$ و $ABCD$ و $FGJI$ را دوبه‌دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خطوط $FI$ و $BC$

ج) خطوط $FI$ و $AB$

د) خطوط $FG$ و $EF$

هـ) خطوط $FG$ و $HI$

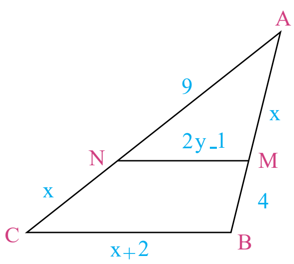
و) یکی از خطوط (به‌دلخواه) و یکی از صفحات (به‌دلخواه)

**۱۱۷** دو صفحهٔ $P_1$ و $P_2$ را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط $d$ فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت (الف) و (ب) تصویر مناسب را رسم کنید).

الف) اگر $P'$ صفحه‌ای باشد که با $P_1$ موازی باشد، نسبت به $P_2$ چه وضعیتی خواهد داشت؟

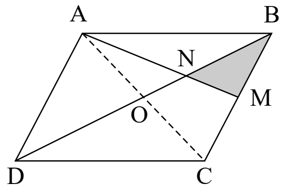
ب) اگر $P'$ صفحه‌ای باشد که با $P_1$ متقاطع است، با $P_2$ چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد؟

**۱۱۸** در شکل مقابل، $MN \parallel BC$؛ مقادیر $x$ و $y$ را به‌دست آورید.

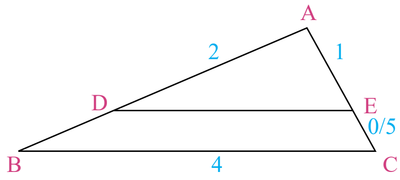


**۱۱۹** در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $M$ وسط ضلع $BC$ است و پاره‌خط $AM$ قطر $BD$ را در $N$ قطع کرده است. نشان دهید:

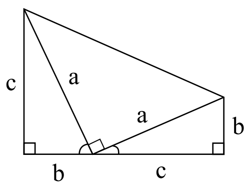
$$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$$



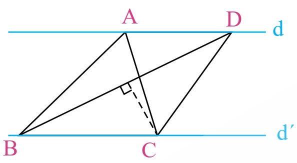

**۱۲۰** در شکل مقابل، $BC \parallel DE$ ؛ با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های $DE$ و $AB$ را به‌دست آورید.



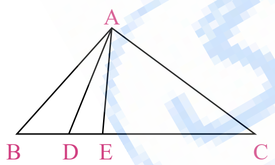

**۱۲۱** مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



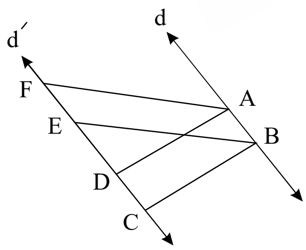

**۱۲۲** در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث $ABC$، $۸cm^۲$ است. اگر $BD = ۶cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ $C$ از $BD$ را به‌دست آورید.




**۱۲۳** در شکل مقابل، مساحت مثلث $ACE$ سه برابر مساحت مثلث $ADE$ و دو برابر مساحت مثلث $ABD$ است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



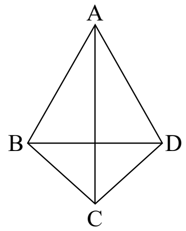

**۱۲۴** در شکل دو خط $d$ و $d'$ موازی هستند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر $S$ باشد، مساحت دیگری برحسب $S$ چقدر است؟




**۱۲۵** طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

**۱۲۶** اگر $\frac{۳}{۵} = \frac{z}{۶} = \frac{y}{۳} = \frac{x}{۲}$، حاصل $x + y + z$ را به‌دست آورید.

۱۲۷ در چهارضلعی $ABCD$، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمود هستند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر $AC$ روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.




۱۲۸ نقیض هریک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

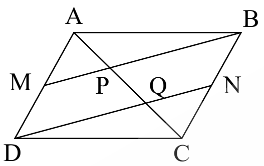
پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر $360^\circ$ است.

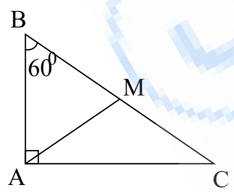
۱۲۹ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۱۳۰ ثابت کنید اگر وسط ضلع‌های هر چهارضلعی را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.
این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع، مستطیل یا لوزی شود؟
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدیدآمده، با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

۱۳۱ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $M$ و $N$ به‌ترتیب وسط ضلع‌های $AD$ و $BC$ هستند. چرا خط‌های $MB$ و $DN$ موازی‌اند؟ به‌کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.




۱۳۲ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر $30^\circ$ است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های $AMC$ و $AMB$ چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویهٔ $30^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.




سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$، یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویهٔ $60^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازهٔ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن $45^\circ$ باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازهٔ وتر است.

۱۳۳ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.

۱۳۴ در کدام $n$ ضلعی، تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

۱۳۵ ثابت کنید در یک مثلث دلخواه، هر سه عمودمنصف همرس هستند.

۱۳۶ به‌کمک استدلال استقرایی حدس بزنید که مجموع زوایای داخلی هر $n$ ضلعی از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

**۱۳۷** آیا حکم کلی «محل برخورد ارتفاع‌های تمام مثلث‌ها در داخل آن قرار دارد»، درست است؟
اگر درست است نقیض آن‌را بیان کنید و اگر نادرست است یک مثال نقض ارائه نمایید.

**۱۳۸** استدلال استقرایی را تعریف کرده و یک مثال ارائه دهید.

**۱۳۹** مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۱۰$cm$ باشد. روش رسم را توضیح دهید.

**۱۴۰** مرکز تمام دایره‌هایی را پیدا کنید که دو خط متقاطع $d$ و $d'$ بر آنها مماس باشند.

**۱۴۱** نقاطی از دایره‌ای به شعاع ۶$cm$ پیدا کنید که از یک نقطه به نام $A$ روی دایره به فاصلهٔ ۴$cm$ باشند.

**۱۴۲** یک لوزی رسم کنید که طول یک قطر آن ۱۰$cm$ و اضلاع آن ۴$cm$ باشد. مسأله چند جواب دارد؟ توضیح دهید.

**۱۴۳** متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۵ و ۹ سانتی‌متر باشد. مسأله چند جواب دارد؟

**۱۴۴** متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۸$cm$ و ۶$cm$ باشد و زاویهٔ بین دو قطر $۱۵۰^\circ$ باشد.

**۱۴۵** مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸$cm$ و زاویهٔ بین دو قطر $۳۰^\circ$ باشد.

**۱۴۶** مستطیلی رسم کنید که طول و عرض آن ۷ و ۴ سانتی‌متر باشد.

**۱۴۷** در مثلث $ABC$، $BD$ نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است. ثابت کنید: $AB > AD$ و $BC > CD$

**۱۴۸** می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ $۳۰^\circ$ نصف وتر است. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ $۱۵^\circ$ دارد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

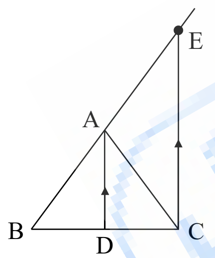
**۱۴۹** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$، $\widehat{A} = ۸۰^\circ$ زاویهٔ رأس بوده و نیمساز خارجی زاویهٔ $B$، امتداد ضلع $AC$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند. اندازهٔ زاویه‌ی $D$ را به دست آورید.

**۱۵۰** در مثلث $ABC$ اگر $\widehat{B} = ۷۵^\circ$ و $\widehat{C} = ۴۵^\circ$ باشد، زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز رأس $A$ در مثلث $ABC$ را به دست آورید.

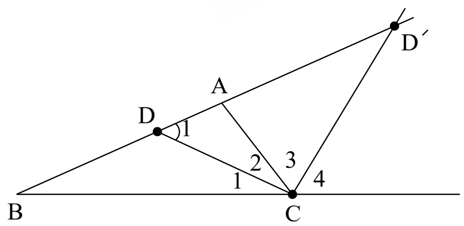
**۱۵۱** ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط یکتاست.

**۱۵۲** در $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌دانیم که $\widehat{B} = ۶۲^\circ$، $\widehat{C} = ۴۴^\circ$ و $CD$ نیمساز زاویهٔ $C$ است. زاویه‌ای که امتداد $CD$ با عمود منصف ضلع $AB$ می‌سازد را به دست آورید.

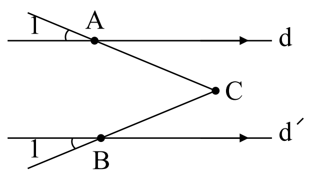
**۱۵۳** در مثلث $ABC$، پاره‌خط $AD$ نیمساز $\hat{A}$ و $AD||CE$ است، ثابت کنید مثلث $ACE$ متساوی‌الساقین است.




**۱۵۴** در شکل مقابل $CD$ نیمساز داخلی و $CD'$ نیمساز خارجی زاویهٔ $C$ هستند. اگر $\widehat{C}_۱ = \frac{۱}{۲}\widehat{C}_۳$ و $\widehat{C}_۴ = ۳\widehat{D}'$ باشد. اندازهٔ هریک از زاویه‌های زیر را محاسبه کنید. $(\hat{D}_۱, \hat{D}', \hat{C}_۳, \hat{C}_۱)$



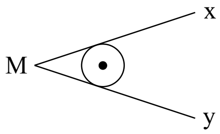

**۱۵۵** با توجه به‌شکل مقابل ثابت کنید: $\widehat{C} = \widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱$



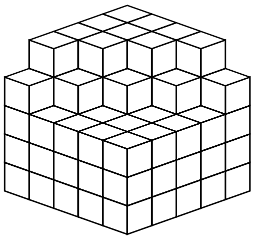

**۱۵۶** ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین اگر یک ساق را از سمت رأس امتداد دهیم نیمساز زاویهٔ خارجی حاصل با قاعدهٔ مثلث موازی خواهد شد.

**۱۵۷** ثابت کنید در هر مثلث زاویه ای که نیمساز دو زاویهٔ مثلث، با یکدیگر می سازند برابر است با مجموع نصف زاویهٔ سوم با زاویهٔ قائمه.

**۱۵۸** با توجه به‌شکل زیر، مکان مراکز دایره‌هایی را که بر $Mx$ و $My$ مماس هستند را به دست آورید.

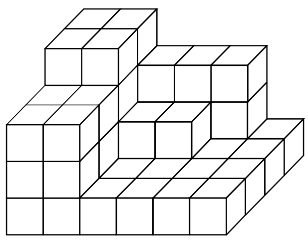



**۱۵۹** به شکل مقابل چند مکعب واحد اضافه کنیم تا مکعب ۵ × ۵ × ۵ کامل شود؟

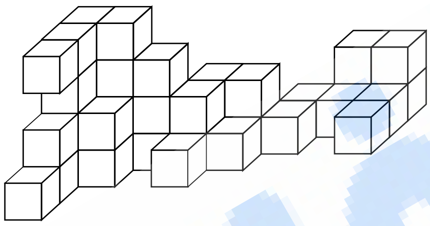


**۱۶۰** در هریک از شکل‌های زیر چند مکعب وجود دارد؟

الف)



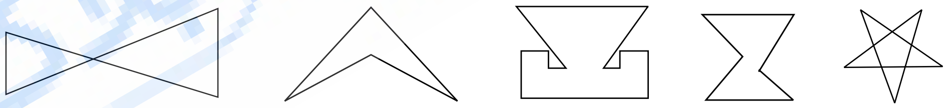
ب)



**۱۶۱** ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنهاست.

**۱۶۲** اگر در چهارضلعی $ABCD$ قطر $BD$ را رسم کنیم و دو مثلث $ABD$ و $BDC$ همنهشت باشند، آیا چهارضلعی $ABCD$ همواره متوازی‌الاضلاع است؟

**۱۶۳** چند تا از شکل‌های زیر چند ضلعی هستند؟



الف) ب) پ) ت) ث)

**۱۶۴** خط دلخواه $d$ اضلاع $AB$،$AC$ و $BC$ (یا امتداد آن‌ها) از مثلث $ABC$ را به‌ترتیب در نقاط $X$ و $Y$ و $Z$ قطع می‌کند. ثابت کنید:

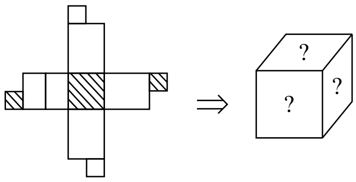
$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{YA} = ۱$$ (قضیهٔ منلائوس)

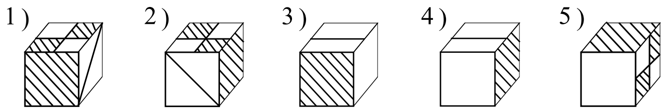
**۱۶۵** متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. از نقطهٔ $C$ خطی چنان رسم می‌کنیم که امتداد خطوط $AD$ و $AB$ را در نقاط $F$ و $E$ قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = ۱$.


**۱۶۶** مستطیلی به عرض ۳ و قطر ۵ سانتی‌متر رسم کنید.

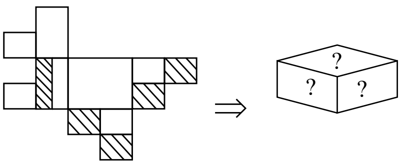
**۱۶۷** گستردهٔ مکعب‌مستطیل‌های زیر داده شده است. شکل کامل‌شده کدام گزینه است؟

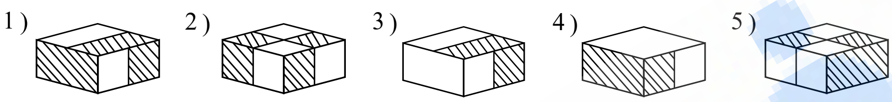
الف



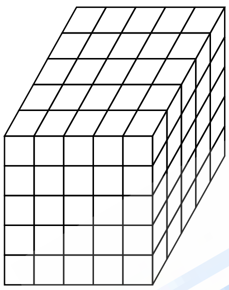




ب




**۱۶۸** سطح مکعب مقابل را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.



**الف** چند مکعب دارای چهار وجه رنگی هستند؟

**ب** چند مکعب دارای سه وجه رنگی هستند؟

**پ** چند مکعب دارای دو وجه رنگی هستند؟

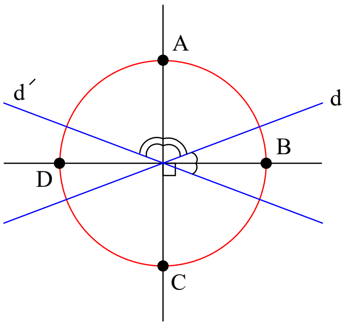
**ت** چند مکعب دارای یک وجه رنگی هستند؟

**ث** چند مکعب رنگ‌آمیزی نشده‌اند؟

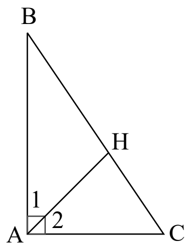
# پاسخنامه تشریحی

**۱**

ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز $O$ و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطهٔ $A$، $B$، $C$ و $D$ از دو خط به یک فاصله‌اند و از $O$ به فاصلهٔ $5cm$ هستند.




**۲**




$$\begin{cases} \text{فرض}: \hat{A} = 90^\circ \text{ و } \hat{A}_1 \neq \hat{C} \\ \text{حکم}: AH \not\perp BC \end{cases}$$

اثبات به‌روش برهان خلف:

۱) خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی $AH \perp BC$. (فرض خلف)

۲) سعی می‌کنیم عمود بودن $AH$ بر $BC$ را به تناقض برسانیم.

$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\triangle}{H}C : \hat{C} + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$$

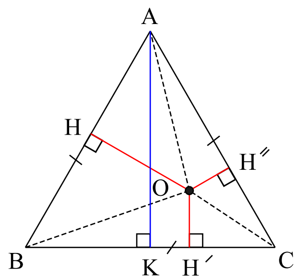
که این با فرض مسئله $\hat{A}_1 \neq \hat{C}$ در تناقض است.

۳) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود، یعنی:

$$AH \not\perp BC$$

**۳**

$$\begin{cases} \text{فرض}: \ AB = AC = BC \\ \text{حکم}: \ OH + OH' + OH'' = AK \ \ (\text{ارتفاع مثلث}) \end{cases}$$




اثبات: از $O$ به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{OAB}} + S_{\overset{\triangle}{OBC}} + S_{\overset{\triangle}{OAC}}$$

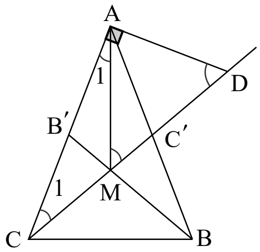
$$\frac{AK \times BC}{2} = \frac{OH \times \overset{BC}{\widehat{AB}}}{2} + \frac{OH' \times BC}{2} + \frac{OH'' \times \overset{BC}{\widehat{AC}}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} AK(\frac{BC}{2}) = OH \times (\frac{BC}{2}) + OH' \times (\frac{BC}{2}) + OH'' \times (\frac{BC}{2})$$

از $\frac{BC}{2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$AK \times \left(\cancel{\frac{BC}{2}}\right) = (OH + OH' + OH'') \times \left(\cancel{\frac{BC}{2}}\right) \Rightarrow AK = OH + OH' + OH''$$

**۴** می‌دانیم سه نیمساز همرس‌اند، یعنی $AM$ نیمساز زاویهٔ $A$ است. زاویهٔ $A\hat{M}D$ زاویهٔ خارجی مثلث $AMC$ است پس:




$$A\hat{M}D = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (1)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه $ACD$ $(C\hat{A}D = 90^\circ)$ داریم:

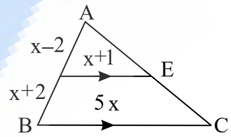
$$A\hat{D}M = 90^\circ - \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

و چون $\hat{B} = \hat{C}$ است پس:

$$A\hat{D}M = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{M}D = A\hat{D}M$ ، یعنی مثلث $AMD$ متساوی‌الساقین است.

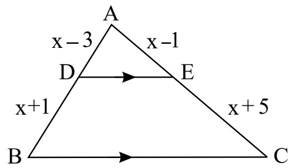
**۵** در شکل اول، طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$DE \| BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{x-2}{2x+2-2} = \frac{x+1}{5x} \Rightarrow 5x^2 - 10x = 2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 4 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

همچنین در شکل دوم، طبق قضیهٔ تالس داریم:

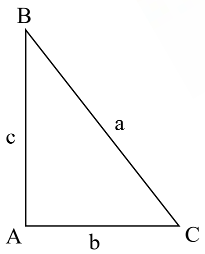



$$DE \| BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+5}$$

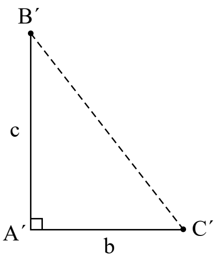
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

**۶** الف) عکس قضیه: اگر در مثلث $ABC$ ، $a^2 = b^2 + c^2$ باشد، آنگاه مثلث در رأس $A$ قائمه است. $(\hat{A} = 90^\circ)$

ب)




$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2$$




(۲)

$$(3) \quad B'C'^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow B'C' = BC = a$$

$$(۴)\ \begin{cases} AB = A'B' = c \\ AC = A'C' = b \\ BC = B'C' = a \end{cases} \xrightarrow{\text{ضضض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ \end{cases}$$

ج) قضیهٔ دوشرطی: یک مثلث، قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد.

**۷** در استدلال استقرایی ما به‌کمک چند تجربه که از مشاهده یا احساس یا حواس پنجگانه دیگر به‌دست می‌آید، یک نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم، که ممکن است این نتیجه‌گیری درست و یا نادرست باشد. ولی در استدلال استنتاجی ما به‌کمک مفاهیم و فرضیاتی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم و نتیجه‌گیری حاصل حتماً درست است.

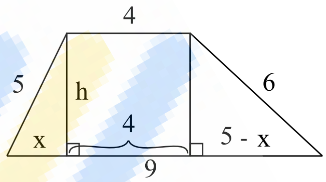
**۸** شکل تقریبی ذوزنقه را رسم می‌کنیم و به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده‌ها $(h)$ را پیدا می‌کنیم. سپس دو خط موازی به فاصلهٔ $h = ۴/۸$ رسم کرده و روی یکی از آنها $۴cm$ جدا می‌کنیم از دو سر این پاره‌خط دو کمان به شعاع ۵ و ۶ می‌زنیم تا خط دیگر را در دو نقطه قطع کنند. چهار نقطه به‌دست‌آمده، جواب مسأله است. (به‌هم وصل می‌کنیم)

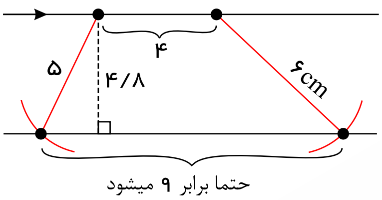
$$\begin{cases} h^۲ = ۳۶^۲ - (۵ - x)^۲ = ۳۶ - ۲۵ + ۱۰x - x^۲ \\ h^۲ = ۲۵ - x^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲۵ - \cancel{x^۲} = \overbrace{۳۶ - ۲۵}^{۱۱} + ۱۰x - \cancel{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۵ - ۱۱ = ۱۰x$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۴}{۱۰} = ۱/۴ \rightarrow h^۲ = ۲۵ - (۱/۴)^۲ = ۲۵ - ۱/۹۶ = ۲۳/۰۴ \rightarrow h = ۴/۸$$




**۹**

مطابق شکل، فرض کنید $PC$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{C_۱} = \hat{C_۲} = ۹۰^\circ \\ AC = BC \\ PC = PC \end{cases} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\Delta}{APC} \cong \overset{\Delta}{BPC} \rightarrow PA = PB$$

**۱۰**

$$\text{فرض}: \begin{cases} AC \| BD \\ BC \| DE \end{cases} \quad \text{حکم}: OB^۲ = OA \times OE$$

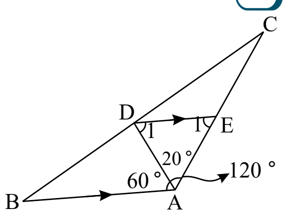
$$\overset{\Delta}{OBD} : AC \| BD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OED} : BC \| DE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} OB^۲ = OA \times OE$$

**۱۱**

$$\begin{cases} \text{فرض} : \hat{A} = ۱۲۰^\circ \\ \text{حکم} : \dfrac{۱}{AD} = \dfrac{۱}{AB} + \dfrac{۱}{AC} \end{cases}$$




از نقطهٔ $D$ موازی $AB$ رسم تا ضلع $AC$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند.

$$DE \| AB \xrightarrow{AD \text{ مورب}} B\hat{A}D = A\hat{D}E = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E_۱} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \text{ متساوی‌الاضلاع است.}$$

$$\overset{\triangle}{AB}C : DE||AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{AD}{AB} \xrightarrow{\div AD} \frac{CE}{AC \times AD} = \frac{۱}{AB} \quad (۱)$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC} \overset{(۱)}{=\!=} \frac{CE}{AC \times AD} + \frac{۱}{AC} = \frac{CE + \overset{AE}{\overbrace{AD}}}{AC \times AD} = \frac{AC}{AC \times AD} = \frac{۱}{AD}$$

۱۲

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد اضلاع} = n \\ \text{تعداد محورهای تقارن} = n \\ \text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-۳)}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow n + n + \frac{n(n-۳)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow ۴n + n^۲ - ۳n = ۷۲$$

$$\Rightarrow n^۲ + n - ۷۲ = ۰ \begin{cases} n = -۹ & \text{غ.ق.ق} \\ n = ۸ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی} = (n-۲) \times ۱۸۰^\circ = ۶ \times ۱۸۰^\circ = ۱۰۸۰^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه‌های خارجی} = ۳۶۰^\circ$$

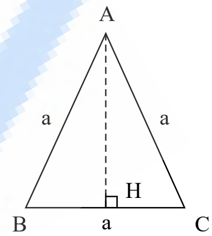
$$\text{اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی} = \frac{(n-۲) \times ۱۸۰^\circ}{n} = \frac{۱۰۸۰^\circ}{۸} = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \text{یک زاویهٔ خارجی} = ۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ = ۴۵^\circ$$

۱۳

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC$$

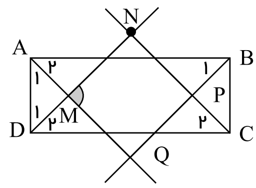
$$\overset{\triangle}{ACH} : AH^۲ = AC^۲ - CH^۲ = a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$




۱۴ با توجه به شکل داریم:

$$\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow MA = MD \quad (۱)$$




$$\begin{cases} \hat{A}_۲ = \hat{D}_۲ = ۴۵^\circ \\ \hat{B}_۱ = \hat{C}_۲ = ۴۵^\circ \\ AB = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{AQB} \cong \overset{\triangle}{DNC} \Rightarrow AQ = DN \quad (۲)$$

$$(۲) - (۱) \Rightarrow AQ - AM = DN - DM \Rightarrow MQ = MN$$

$$\overset{\triangle}{ADM} : \text{خارجی } \widehat{M} = \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

چهارضلعی که چهار زاویهٔ قائمه دارد مستطیل است و مستطیلی که دو ضلع مجاور مساوی دارد $(MN = MQ)$ مربع است.

۱۵ عکس وقتی بزرگ می‌شود، عکس و بزرگ‌شدهٔ آن باهم متشابه هستند. پس:

$$\frac{۴}{۴+۱۰} = \frac{۶}{۶+x} \Rightarrow \frac{۴}{۱۴} = \frac{۶}{۶+x} \Rightarrow ۴x + ۲۴ = ۸۴ \Rightarrow ۴x = ۶۰ \Rightarrow x = ۱۵$$

$$\text{طول عکس جدید} = ۱۵ + ۶ = ۲۱ cm$$

۱۶

$$AH' = ۱۲ \ , \ OH = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \ , \ OH' = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ (\text{متقابل به رأس}) \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{OA}H' \sim \overset{\triangle}{OB}H \rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{AH'}{BH} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{۲/۴}{۳۶} = \frac{۱۲}{BH} \Rightarrow BH = \frac{۱۲ \times ۳۶}{۲/۴} = ۱۸۰$$

۱۷ طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{N} = ۹۰^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AB}C \sim \overset{\triangle}{NM}C \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{NC} = \frac{BC}{MC} \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{MN}C : MC^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵ \rightarrow MC = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

$$(۱) \Rightarrow \frac{AB}{۹} = \frac{۹+۱۵}{۱۲} = \frac{BC}{۱۵} \Rightarrow \begin{cases} AB = \dfrac{۹ \times ۲۴}{۱۲} = ۱۸ \\ BC = \dfrac{۱۵ \times ۲۴}{۱۲} = ۳۰ \end{cases}$$

$BN = BC - NC = ۳۰ - ۱۲ = ۱۸$

محیط $ABNM = AB + BN + NM + AM = ۱۸ + ۱۸ + ۹ + ۹ = ۵۴$

(۱۸)

با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned} DE \parallel BC \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \\ DC \parallel BF \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CF} = \frac{۸+۱۲}{CF} = \frac{۲۰}{CF} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۲۰}{CF} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow CF = ۳۰$$

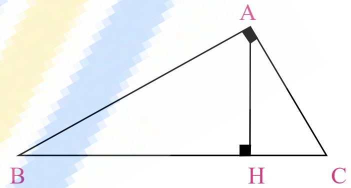
(۱۹)

$$a^۲ = bc \Rightarrow a^۲ = ۱۲\sqrt{۳} \times ۵\sqrt{۳} = ۶۰ \times ۳ = ۱۸۰ \Rightarrow a = \sqrt{۱۸۰} = \sqrt{۳۶ \times ۵} = ۶\sqrt{۵}$$

(۲۰)

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{۷}{۵} \\ \frac{y}{z} = \frac{۳}{۸} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{۷}{۵} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۲۱}{۴۰}$$

(۲۱)




$۱)\ BH = ۹\ ,\ CH = ۴\ ,\ AH = ?\ ,\ AB = ?\ ,\ AC = ?$

در تمام موارد، سه مثلث زیر متشابه هستند (زز):

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH}$$

$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AH^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$$

$$\overset{\triangle}{ACH} : AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۶^۲ + ۴^۲ = ۵۲ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow (۹+۴)^۲ = AB^۲ + (۲\sqrt{۱۳})^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۶۹ - ۵۲ = ۱۱۷ \Rightarrow AB = ۳\sqrt{۱۳}$$

$۲)\ AB = ۱۰\ ,\ BC = ۱۲\ ,\ AC = ?\ ,\ AH = ?$

روش اول:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow ۱۲^۲ = ۱۰^۲ + AC^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}} \times ۱۰ \times ۲\sqrt{۱۱} = \cancel{\frac{۱}{۲}} \times AH \times ۱۲ \Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

روش دوم:

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۲} = \frac{AH}{۱۰} \Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

$۳)\ AB = ۸\ ,\ AC = ۶\ ,\ BH = ?\ ,\ CH = ? \Rightarrow BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$

$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^۲ = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{۸^۲}{۱۰} = ۶/۴$$

$$CH = BC - BH \Rightarrow CH = ۱۰ - ۶/۴ = ۳/۶$$

$۴)\ AB = ۸\ ,\ AH = ۴\ ,\ BC = ?\ ,\ AC = ?$

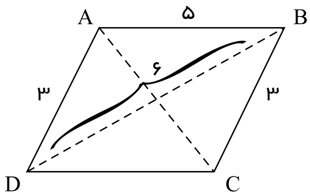
$$\overset{\triangle}{ABH} : AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۸^۲ = ۴^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{۸}{AC} = \frac{۴\sqrt{۳}}{AH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{۸}{AC} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow AC = \frac{۸}{\sqrt{۳}} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^{۲} = BH \times BC$$

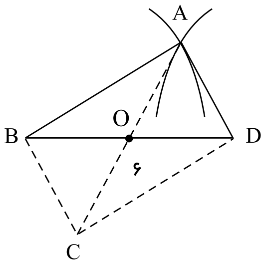
$$\Rightarrow ۸^{۲} = ۴\sqrt{۳} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

**۲۲** شکل تقریبی متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم تا تصویری از آن در ذهن ما ایجاد شود.



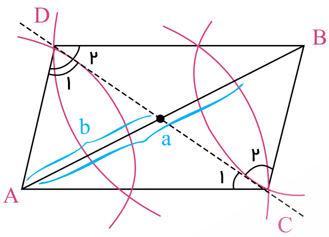

بنابراین یک مثلث $(ABD)$ با سه ضلع معلوم است. $\overset{\triangle}{ABD}$ را با داشتن سه ضلع آن، رسم می‌کنیم.

سپس از $A$ به $O$ وسط $BD$ رسم کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ $C$ به‌دست آید. از $C$ به $D$ و $B$ وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ جواب مسأله است.




**۲۳** از $B$ به $D$ وصل می‌کنیم:

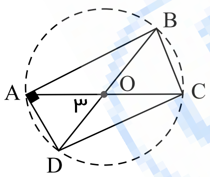
$$\begin{cases} AC = BD = a \\ AD = BC = b \\ DC = DC \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \rightarrow \begin{cases} \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۲ \\ \widehat{D}_۲ = \widehat{C}_۱ \end{cases}$$




$$\left.\begin{matrix} \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۲ \xrightarrow[\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}]{\text{مورب}DC} AD \parallel BC \\ \widehat{D}_۲ = \widehat{C}_۱ \xrightarrow[\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}]{\text{مورب}DC} AC \parallel BD \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{چهارضلعی } ACBD \text{ متوازی‌الاضلاع است}$$

**۲۴** دایره‌ای به شعاع $۳cm$ و به مرکز $O$ رسم می‌کنیم. هر دو قطر دلخواه این دایره، دو قطر متقاطع مستطیل مورد نظر خواهند بود.

زوایای D,C,B,A زاویه‌های محاطی مقابل به قطر هستند. بنابراین همهٔ آنها قائمه‌اند. در نتیجه چهارضلعی مستطیل است.



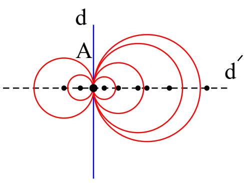

**۲۵** قضیه: دو زاویهٔ قائمه مکمل هستند. $\xleftarrow{\text{عکس}}$ دو زاویهٔ مکمل، قائمه هستند. (نادرست)

مثال نقض:

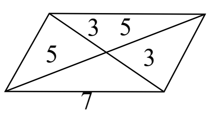
$\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۱۴۰^\circ$ $\quad\quad$ $\hat{A} + \hat{B} = ۴۰^\circ + ۱۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

دو زاویهٔ $A$ و $B$ مکمل هستند ولی هیچ‌کدام قائمه نیستند.

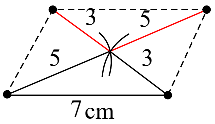
**۲۶** مرکز همگی این دایره‌ها روی خط $d'$ که عمود بر خط $d$ در نقطهٔ $A$ است قرار دارند.



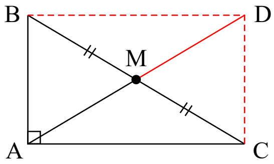

**۲۷** شکل تقریبی آن به‌صورت مقابل است.




بنابراین ابتدا مثلثی با ابعاد ۳ و ۵ و ۷ سانتی‌متر را رسم کرده سپس دو ضلع ۳ و ۵ را از رأس مشترک به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم و نقاط حاصل را به یکدیگر وصل می‌کنیم.




**۲۸**




$$\begin{cases} \text{فرض}: MB = MC \\ \text{حکم}: AM = \dfrac{BC}{۲} \end{cases}$$

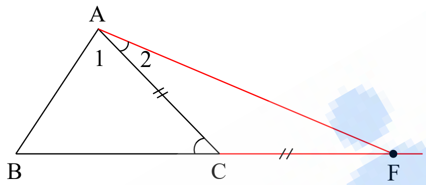
از نقطهٔ $B$ موازی $AC$ و از $C$ موازی $AB$ رسم می‌کنیم تا مستطیل $ABDC$ حاصل شود. می‌دانیم در مستطیل قطرها برابر بوده و همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی:

$AD = BC \to MB = MC \to$ وسط $BC$ $M$ $\to$ پس $M$ وسط $AD$ هم هست $\to MA = MD$

چون دو قطر برابر هستند پس نصف دو قطر نیز برابر هستند، یعنی: $AM = MB = \dfrac{BC}{۲}$

**۲۹**

قضیهٔ نامساوی مثلث‌ها:




$$\text{حکم}: \begin{cases} AB + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \end{cases}$$

یکی از سه حکم را به دلخواه اثبات کرده و دو حکم دیگر نیز به‌همان صورت اثبات می‌شود.

حکم: $AC + CB > AB$

اثبات: از نقطهٔ $C$، $BC$ را به اندازهٔ $AC$ امتداد می‌دهیم تا $F$ به دست آید، سپس از $A$ به $F$ وصل می‌کنیم.

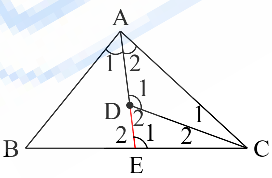
$$\overset{\triangle}{BAF} : B\widehat{A}F > \widehat{A}_۲ = \widehat{F} \to B\widehat{A}F > \hat{F} \overset{*}{\to} BF > AB$$

* (قضیه: در یک مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.)

$$BF > AB \xrightarrow{BF=BC+CF} BC + CF > AB \xrightarrow{AC=CF} BC + AC > AB$$

**۳۰**

اثبات: پاره‌خط $AD$ را امتداد می‌دهیم تا $BC$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. داریم:



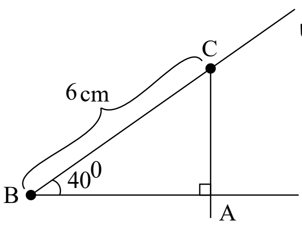

$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{ABE} &: \widehat{E}_۱ = \widehat{A}_۱ + \widehat{B} \to \widehat{E}_۱ > \widehat{B} \\ \overset{\triangle}{EDC} &: \widehat{D}_۱ = \widehat{E}_۱ + \widehat{C}_۲ \to \widehat{D}_۱ > \widehat{E}_۱ \end{aligned}\right\} \to \widehat{D}_۱ > \widehat{E}_۱ > \widehat{B} \to \widehat{D}_۱ > \widehat{B}$$

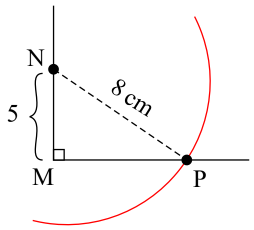
**۳۱** قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت شرطی: اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد آنگاه مجذور وتر، با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر می‌شود.

قضیهٔ دو شرطی: مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد.

**۳۲**

الف) ابتدا $\widehat{B} = ۴۰^\circ$ را رسم کرده و سپس روی یکی از ضلع‌ها پاره‌خط $BC = ۶cm$ را جدا کرده و از نقطهٔ $C$ عمودی بر ضلع دیگر وارد می‌کنیم تا نقطهٔ $A$ به‌دست آید. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.



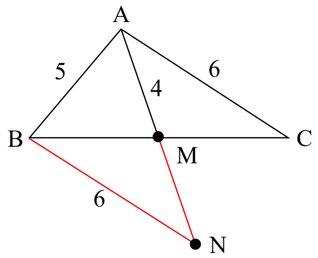


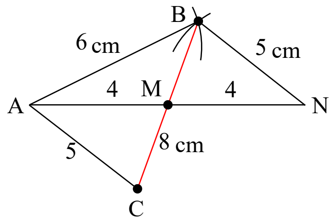

ب) ابتدا یک زاویهٔ قائمه، $\widehat{M} = 90^\circ$ را رسم می‌کنیم. سپس روی یک ضلع این زاویه $MN = 5cm$ را جدا کرده و از نقطهٔ $M$ یک دایره به شعاع $NP = 8cm$ رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در $P$ قطع کند. $\overset{\Delta}{MNP}$ جواب مسأله است.

**۳۳**

شکل فرضی مثلث $ABC$ را رسم می‌کنیم.

ابتدا مثلث $ABN$ به اضلاع ۵ و ۶ و ۸ را رسم می‌کنیم.



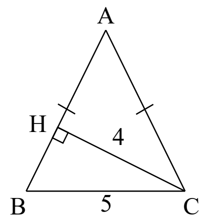




سپس از نقطهٔ $B$ به وسط $AN$ نقطهٔ $M$ وصل کرده و به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ $C$ حاصل شود از $A$ به $C$ وصل می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.

**۳۴** شکل ظاهری آن به‌صورت مقابل است.

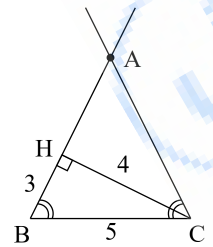
در مثلث $BCH$ از رابطهٔ فیثاغورس، $BH = 3cm$ می‌شود.

$$BH^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow BH = 3cm$$



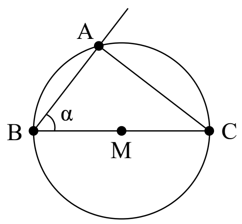

ابتدا $\overset{\Delta}{BCH}$ را با اندازه‌های سه ضلع ۵، ۴ و ۳ رسم می‌کنیم.

از $B$ به $H$ وصل کرده امتداد می‌دهیم و از $C$ نیز به اندازهٔ زاویهٔ $B$ ایجادشده رسم کرده تا این دو همدیگر را در نقطهٔ $A$ قطع کنند. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.



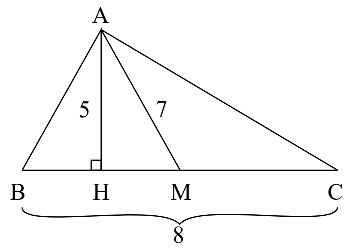

**۳۵**

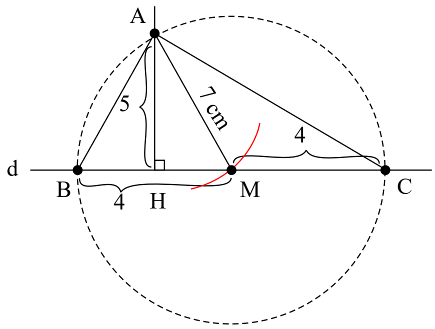
پاره‌خط $BC = a$ را رسم کرده و از نقطهٔ $B$، زاویهٔ $\widehat{B} = \alpha$ را ترسیم می‌کنیم سپس به مرکز $M$ وسط $BC$ و به شعاع $AM = m_a$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با ضلع دیگر زاویهٔ $B$، رأس $A$ خواهد بود. از $A$ به $C$ وصل می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.




**۳۶** شکل فرضی مثلث را در نظر می‌گیریم.

ابتدا خط $d$ را رسم کرده و روی خط $d$ نقطهٔ دلخواه $H$ را انتخاب و عمودی از آن نقطه خارج می‌کنیم و روی آن به اندازهٔ ۵ $AH = 5$ جدا کرده و از نقطهٔ $A$ به اندازهٔ ۷ $AM = 7$ یک کمان می‌زنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $M$ قطع کند.

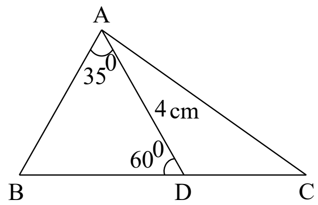


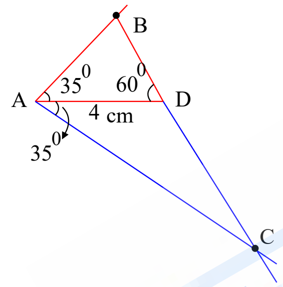

به مرکز $M$ و به شعاع ۴$cm$ یک دایره رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقاط $B$ و $C$ قطع کند از $A$ به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.

**۳۷**

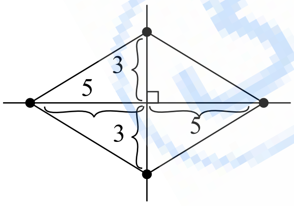
شکل تقریبی سؤال را در نظر می‌گیریم. بنابراین ابتدا $\overset{\triangle}{BDA}$ را با «زض‌ز» معلوم رسم می‌کنیم.




سپس زاویهٔ $C\hat{A}D$ را به اندازهٔ $۳۵^\circ$ رسم می‌کنیم و ضلع $BD$ را امتداد داده تا نقطهٔ $C$ حاصل شود. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.

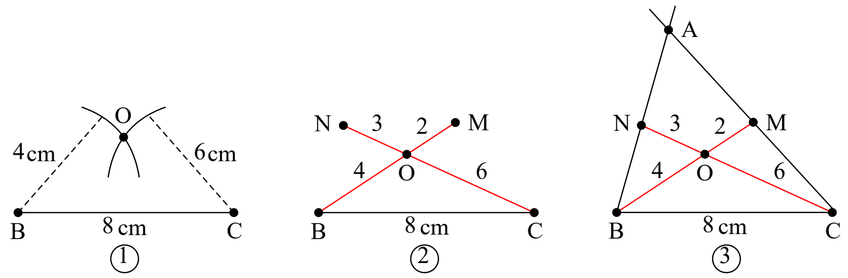



**۳۸** می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. دو خط عمود برهم رسم کرده و از نقطهٔ تقاطع روی یک خط، اندازه‌های ۳$cm$ جدا می‌کنیم و روی ضلع دیگر ۵$cm$. سپس چهار نقطه را به‌طور متوالی به‌هم وصل می‌کنیم.



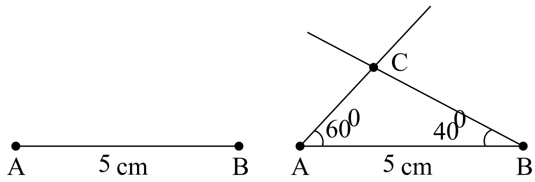

**۳۹** می‌دانیم میانه‌های مثلث به‌نسبت $\frac{۲}{۳}$ از سمت رأس همدیگر را قطع می‌کنند.

نحوهٔ ترسیم: ابتدا $BC = ۸cm$ را رسم می‌کنیم. سپس به کمک پرگار یک کمان به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ میانهٔ $BM$ $(۴cm)$ از $B$ و یک کمان به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ میانهٔ $CN$ $(۶cm)$ از $C$ می‌زنیم تا همدیگر را در نقطهٔ $O$ قطع کنند (محل تقاطع میانه‌ها). از $B$ به $O$ وصل کرده و $\frac{۱}{۳}$ دیگر ادامه می‌دهیم تا $M$ به‌دست آید و از $C$ به $O$ وصل کرده و $\frac{۱}{۳}$ دیگر ادامه داده تا $N$ به‌دست آید. در آخر از $B$ به $N$ وصل کرده امتداد می‌دهیم و از $C$ به $M$ وصل کرده امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطهٔ $A$ قطع کند. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.

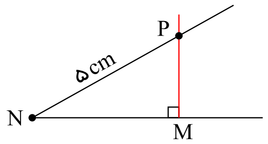



**۴۰**

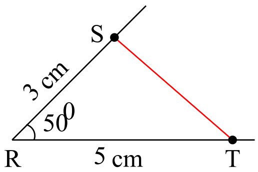
الف) با خط‌کش یک پاره‌خط به طول $۵cm$ رسم کرده و $AB$ می‌نامیم. از سمت $A$ یک زاویه با نقاله به اندازهٔ $۶۰^\circ$ و از سمت $B$ به اندازهٔ $۴۰^\circ$ رسم می‌کنیم تا همدیگر را در $C$ قطع کنند، $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.




ب) ابتدا با نقاله $\widehat{N} = ۳۰^\circ$ را رسم می‌کنیم، سپس روی یک ضلع به اندازهٔ $NP = ۵cm$ جدا کرده و از آن بر ضلع دیگر عمود $MP$ را وارد می‌کنیم. $\overset{\Delta}{MNP}$ جواب مسأله است.

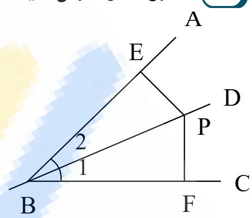



ج) ابتدا $\widehat{R} = ۵۰^\circ$ را با نقاله رسم کرده سپس روی یک ضلع $۵cm$ و روی ضلع دیگر $۳cm$ جدا می‌کنیم. $\overset{\Delta}{RST}$ جواب مسأله است.




**۴۱** مطابق شکل، فرض کنید $BD$ از زاویهٔ $A\hat{B}C$ است، پس $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ و داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BP = BP \end{cases} \Rightarrow \text{دو مثلث قائم الزاویه } BFP, EBP \text{ طبق حالت وتر و یک زاویه حاده هم‌نهشت هستند.}$$




بنابراین: $PE = PF$

**۴۲**

در دو مثلث متشابه، تمام اجزای آن دو مثلث باهم متناسب هستند، پس:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{NMP} \rightarrow \frac{BD}{MQ} = \frac{AC}{NP} \Rightarrow \frac{x}{x-۳} = \frac{۳۶}{۱۲} = ۳ \Rightarrow x = ۳x - ۹ \Rightarrow ۲x = ۹ \Rightarrow x = ۴/۵$$

**۴۳**

$$\frac{AC}{AE} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow \frac{AC}{AC+CE} = \frac{۴}{۴+۳} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{۴}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \| DE \xrightarrow{\text{مورب } AE} \hat{A} = \hat{E} \\ \text{متقابل به رأس } \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEC}$$

$$\rightarrow \textbf{نسبت تشابه} = \frac{AC}{CE} = \frac{۴}{۳} \rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{۴}{۳}$$

$$\textbf{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۹}$$

**۴۴**

می‌دانیم دو $n$ضلعی منتظم، همواره باهم متشابه‌اند و داریم:

نکته:

$$\begin{cases} \text{(نسبت تشابه)} = \text{نسبت اضلاع} = \text{نسبت ارتفاع‌ها} = \text{نسبت میانه‌ها} = \text{نسبت نیمسازها} = \text{نسبت محیطها} = k \\ \text{(نسبت مساحت‌ها)} = \text{(نسبت تشابه)}^۲ = k^۲ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\text{محیط اولی}}{\text{محیط دومی}} = k = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{همچنین}} \text{نسبت اضلاع} = k = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{S_{\text{اولی}}}{S_{\text{دومی}}} = k^۲ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶}$$

**۴۵**

$$\text{دو مستطیل متشابهند.} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{BF} \Rightarrow BF = ۹$$

$$S_{ABCD} = AB \times AD = ۱ \times ۳ = ۳ \quad , \quad S_{BCEF} = BC \times CE = ۳ \times ۹ = ۲۷$$

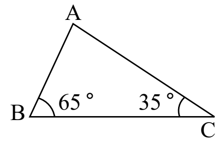
**۴۶**

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \hat N+\hat P=۹۰^\circ\\ \hat N+\hat A_۱=۹۰^\circ\\ \hat A_۲+\hat D_۱=۹۰^\circ \\ \hat A_۱+\hat A_۲=۹۰^\circ\\ \hat D_۲+\hat P=۹۰^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ززز}} \overset{\Delta}{AB}N\sim D\overset{\Delta}{M}A\sim P\overset{\Delta}{C}D\sim P\overset{\Delta}{M}N$$

بنابراین، $\binom{۴}{۲}=۶$ جفت مثلث متشابه وجود دارد.

۴۷) زاویهٔ سوم مثلث $ABC$ برابر است با:

$$\hat A = ۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۳۵^\circ)=۸۰^\circ$$



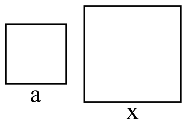

الف) $\left.\begin{array}{r} ۸۰^\circ=۸۰^\circ\\ ۳۵^\circ=۳۵^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}}$ با مثلث $ABC$ متشابه است.

ب) $\left.\begin{array}{r} ۶۵^\circ=۶۵^\circ\\ ۸۵^\circ\neq ۸۰^\circ\\ ۳۰^\circ\neq ۳۵^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$ زاویه‌ها برابر نیستند، بنابراین با مثلث $ABC$ متشابه نیست.

۴۸) دو حالت رخ می‌دهد:

ضلع مربع کوچک $=۲۰cm \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow x=۵۰cm$

ضلع مربع بزرگ $=۲۰cm\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{a}{۲۰}\Rightarrow a=۴cm$




۴۹)

$$DE||AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow \frac{۳}{x+۳}=\frac{۴/۵}{۱۲}\Rightarrow x=۵$$

$$DE||AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}\Rightarrow \frac{۳}{x}=\frac{y}{۷}\Rightarrow y=\frac{۳\times ۷}{۵}=۴/۲$$

۵۰)

الف) $\frac{۲x-y}{x+y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۶x-۳y=۲x+۲y\Rightarrow ۴x=۵y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۵}{۴}$

ب) $\frac{x}{y}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \frac{x+y}{x}=\frac{۵+۴}{۵}\Rightarrow \frac{x+y}{۲\times x}=\frac{۹}{۲\times ۵}=\frac{۹}{۱۰}$

تفضیل صورت از مخرج $\Rightarrow \frac{x+y}{۲x-x-y}=\frac{۹}{۱۰-۹}\Rightarrow \frac{x+y}{x-y}=\frac{۹}{۱}=۹$

ج) فرض کنیم $\begin{cases} x=۵\\ y=۴\end{cases}\Rightarrow \frac{۳x-۲y}{۲x-۳y}=\frac{۳\times ۵-۲\times ۴}{۲\times ۵-۳\times ۴}=\frac{۱۵-۸}{۱۰-۱۲}=\frac{۷}{-۲}=-\frac{۷}{۲}$

۵۱) الف)

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۶x-۳=۲x+۲\Rightarrow ۴x=۵\rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

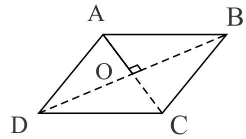
$$\frac{۲}{۳}=\frac{x+y-۱}{y}\xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}}\frac{۲}{۳}=\frac{\frac{۵}{۴}+y-۱}{y}\Rightarrow ۲y=۳y+\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}$$

ب)

$$\frac{x+۱}{۴}=\frac{۳}{x+۲}\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۱۲\Rightarrow x^۲+۳x-۱۰=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق.ق}\\ x=-۵ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$\frac{۳}{-۵+۲}=\frac{|y|}{۸}\ \text{غیرممکن است}\quad,\quad \frac{۳}{۲+۲}=\frac{|y|}{۸}\Rightarrow |y|=۶\Rightarrow y=\pm ۶$$

۵۲) می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر هستند. یعنی: $OA=OC$.



$OA$ میانهٔ وارد بر ضلع $BD$ در $\overset{\Delta}{ABD}$ است. $(OB = OD)$

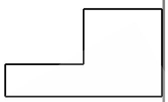
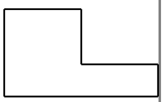
$$\overset{\Delta}{ABD}: \left.\begin{array}{l} OA \text{ میانه است} \\ OA \text{ ارتفاع است} \end{array}\right\} \rightarrow \text{ متساوی‌الساقین است } \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow AB = AD$$

$$ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع است} \Rightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

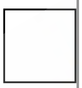
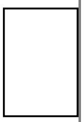
$\Rightarrow$ در $ABCD$ هر چهار ضلع برابر است.

بنابراین $ABCD$ لوزی است.

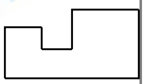
۵۳

| نمای روبه‌رو | نمای بالا | نمای چپ |
|---|---|---|
|  |  |  |

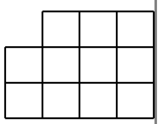
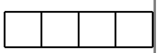
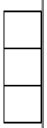
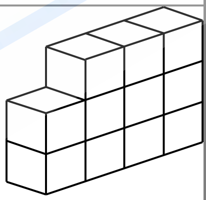
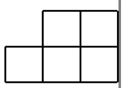
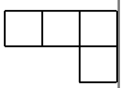
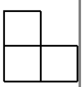
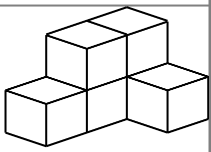
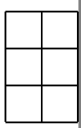
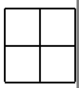
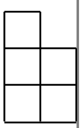
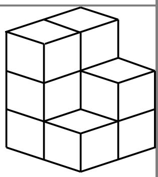
۵۴ الف)

| نمای روبه‌رو | نمای چپ | نمای بالا |
|---|---|---|
|  |  |  |

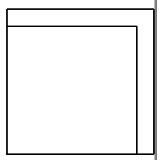
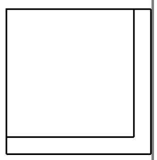
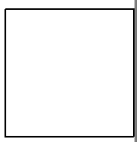
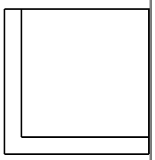
ب)

| نمای روبه‌رو | نمای چپ | نمای بالا |
|---|---|---|
|  |  |  |

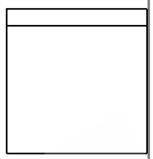
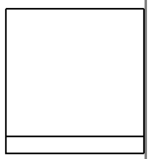
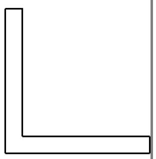
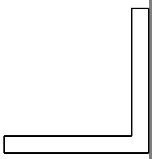
۵۵

| نمای روبه‌رو | نمای بالا | نمای چپ | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

۵۶

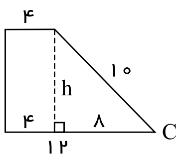
| نمای بالا | نمای روبه‌رو | نمای راست | نمای چپ |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

**۵۷** ابتدا باید یک طرف را به‌عنوان نمای روبه‌رو انتخاب کنیم سپس رسم کنیم.

| نمای بالا | نمای روبه‌رو | نمای چپ | نمای راست |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

**۵۸**

با توجه به شکل داریم:



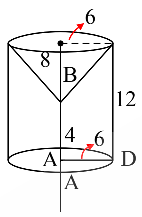

$h^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ = ۳۶$

$\Rightarrow h = ۶ \rightarrow AD = ۶$

الف) حول $AB$:

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h' = \pi r^۲ (h - \frac{۱}{۳}h')$$

$$\Rightarrow V = \pi \times ۶^۲ \times (۱۲ - \frac{۸}{۳}) = \pi \times ۳۶ \times \frac{۲۸}{۳} = ۳۳۶\pi$$

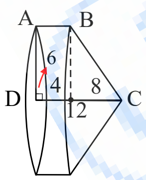



ب) حول $DC$:

$$V = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h + \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h'$$

$$\Rightarrow V = \pi r^۲ (h + \frac{۱}{۳}h') = \pi \times ۶^۲ \times (۴ + \frac{۸}{۳})$$

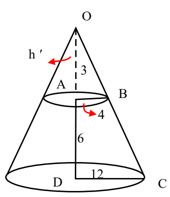
$$V = \pi \times \overset{۱۲}{\cancel{۳۶}} \times \frac{۲۰}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} = ۲۴۰\pi$$




ج) حول $AD$: یک مخروط ناقص می‌شود.

$$\overset{\triangle}{ODC} : AB \| DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۴}{۱۲}$$

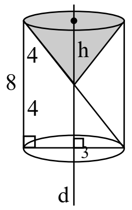
$$\Rightarrow ۱۲x = ۴x + ۲۴ \rightarrow ۸x = ۲۴ \rightarrow x = ۳ = h'$$




$$V = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \underbrace{h}_{۶+۳} - \frac{۱}{۳}\pi r'^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi(۱۲^۲ \times ۹ - ۴^۲ \times ۳)$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۲۹۶ - ۴۸) = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱۲۴۸ = ۴۱۶\pi$$

**۵۹** حول خط $d$ یک استوانه است که به‌صورت مخروط بالای آن خالی است.

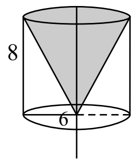



$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$$
$$\Rightarrow AB^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \to h = ۴$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h' - \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \pi \times ۳^۲ \times ۸ - \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۴}{۳}$$
$$V = ۷۲\pi - ۱۲\pi = ۶۰\pi$$

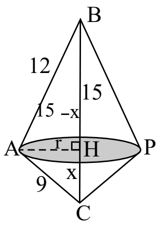
حول $d'$ یک استوانه است که یک مخروط با همان ارتفاع خالی است.

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h - \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{۲}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۶^۲ \times ۸$$
$$V = ۲ \times \pi \times ۱۲ \times ۸ = ۱۹۲\pi$$




۶۰ داریم $۹^۲ + ۱۲^۲ = ۱۵^۲$، بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹ \times ۱۲}{۲} = \frac{r \times ۱۵}{۲} \Rightarrow r = \frac{۹ \times ۱۲}{۱۵} = \frac{۳۶}{۵} = ۷{,}۲$$




مطابق شکل، فضای اشغال‌شده، دو مخروط می‌شود:

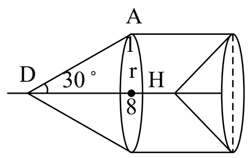
$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بالا}} + V_{\text{مخروط پایین}} = \frac{۱}{۳} \times \pi r^۲ h + \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ (\underbrace{h + h'}_{۱۵})$$
$$= \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۷{,}۲^۲ \times ۱۵ = \frac{۱}{۳}\pi \times (\frac{۳۶}{۵})^۲ \times ۱۵ = \frac{۵\pi \times ۳۶ \times ۳۶}{۵ \times ۵} = \frac{۱۲۹۶\pi}{۵}$$

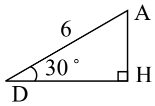
۶۱ مطابق شکل، نیم‌کره تشکیل می‌شود.

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۲$$
$$\Rightarrow V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{۲}{۳}\pi r^۲ = \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۶^۲ = ۲۴\pi$$

۶۲ فضای اشغال‌شده برابر فضای یک استوانه می‌شود، چون به‌اندازهٔ یک مخروط از سمت $D$ اضافه ولی به همان اندازه از سمت $C$ خالی است.

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $۳۰^\circ$ نصف وتر است.

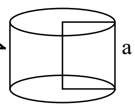


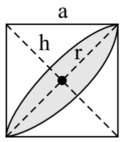




$$AH = \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$$
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۸ = ۷۲\pi$$

۶۳

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi \times a^۲ \times a = \pi a^۳$$





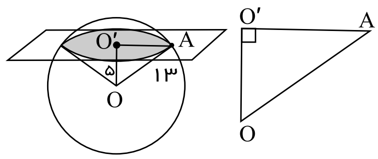

$h = r = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$

$$V_{\text{یک مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a)^۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}a}{۳} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}\pi a^۳$$

$$V_{\text{کل (دو مخروط)}} = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}\pi a^۳ = \frac{\sqrt{۲}}{۶}\pi a^۳$$

**۶۴**

**الف)**




فیثاغورس: $OA^۲ = O'A^۲ + OO'^۲$

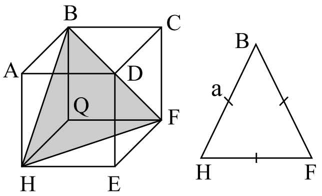
$\Rightarrow ۱۳^۲ = O'A^۲ + ۵^۲ \Rightarrow O'A^۲ = ۱۴۴ \rightarrow O'A = ۱۲cm$

(سطح مقطع) $S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi(O'A)^۲ = \pi \times ۱۲^۲ = ۱۴۴\pi(cm^۲)$

**ب) جسم حاصل یک مخروط قائم به شعاع ۱۲ و ارتفاع ۵ سانتی‌متر می‌شود.**

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱۲^۲ \times ۵ = ۲۴۰\pi(cm^۳)$$

**۶۵**



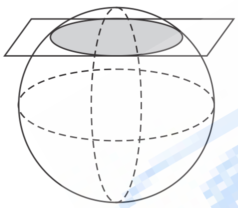

$\overset{\triangle}{ABH} : BH^۲ = AB^۲ + AH^۲ = ۱۲^۲ + ۱۲^۲ = ۱۲\sqrt{۲}cm$

$\overset{\triangle}{BHF} : a = ۱۲\sqrt{۲}cm$

$S_{\overset{\triangle}{BHF}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۲\sqrt{۲})^۲ = ۷۲\sqrt{۳}cm^۲$

**۶۶**

**یک کره به هر نحوی توسط یک صفحه برش داده شود یک دایره ایجاد می‌شود.**



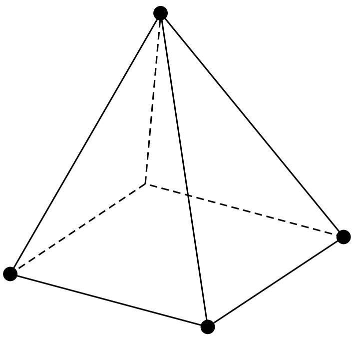
**۶۷**

**تعداد کره‌ها در قاعدهٔ هرم** $= ۷ \times ۷ = ۴۹$

**ردیف بالایی قاعده** $= ۶ \times ۶ = ۳۶$

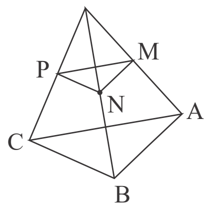
به همین صورت : $\begin{cases} ۵ \times ۵ = ۲۵ \\ ۴ \times ۴ = ۱۶ \end{cases}$

$\Rightarrow$ در نتیجه تعداد کل کره‌ها $= ۴۹ + ۳۶ + ۲۵ + ۱۶ + ۹ + ۴ + ۱ = ۱۴۰$



**۶۸**

$$\begin{cases} P, N, M \text{ وسط یال‌ها} & : \text{فرض} \\ \text{صفحهٔ } MNPABC \text{ با صفحهٔ } ABC \text{ موازی} & : \text{حکم} \end{cases}$$



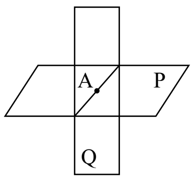

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABD} : \dfrac{DM}{MA} = \dfrac{DN}{NB} = ۱ \\ \overset{\triangle}{DBC} : \dfrac{DN}{NB} = \dfrac{DP}{PC} = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} \begin{cases} MN \parallel AB \\ PN \parallel BC \end{cases}$$

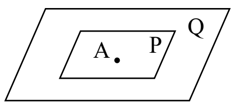
هرگاه دو خط متقاطع از یک صفحهٔ $(PN\ ,\ MN)$ با دو خط متقاطع از صفحهٔ دیگری $(CB\ ,\ AB)$ دوبه‌دو موازی باشند، این دو صفحه با هم موازی هستند. $(\overset{\triangle}{ABC} \parallel \overset{\triangle}{MNP})$

۶۹

وقتی نقطهٔ $A$ بین دو صفحه، مشترک باشد این دو صفحه دو حالت می‌توانند داشته باشند یا در یک خط متقاطع هستند که فصل مشترک دو صفحه نامیده می‌شود و فصل مشترک شامل نقطهٔ $A$ است.

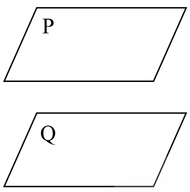



و یا دو صفحه برهم منطبق هستند.



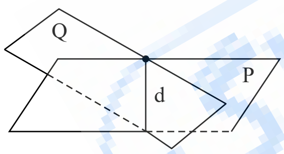

۷۰ الف) به دو صفحه در فضا اگر هرگز همدیگر را قطع نکنند موازی می‌گویند.

$P \parallel Q$




ب) اگر دو صفحه در یک خط مشترک باشند دو صفحه را متقاطع می‌نامند.

$P \cap Q = d$




توجه: وقتی دو صفحه بر هم منطبق باشند، آنها را یک صفحه درنظر می‌گیریم.

۷۱

طبق فرمول پیک : $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = i + \dfrac{b}{۲} - ۱ = ۹ + \dfrac{۳}{۲} - ۱ = ۹/۵$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} CH \times AB = \frac{۱}{۲} \times CH \times ۵ = ۹/۵ \Rightarrow \frac{۵}{۲} CH = \frac{۱۹}{۲} \Rightarrow CH = \frac{۱۹}{۵}$$

رأس $C$ از ضلع $AB$ به اندازهٔ $\dfrac{۱۹}{۵}$ واحد فاصله دارد .

۷۲

طبق فرمول پیک داریم:

$$\text{مساحت شبکه‌ای} = \text{نقاط درون چندضلعی} + \frac{\text{نقاط مرزی}}{۲} - ۱$$

$$S = i + \frac{b}{۲} - ۱$$

$$S = ۳ + \frac{۸}{۲} - ۱ = ۶$$

می‌دانیم : $\dfrac{S}{S'} = (k)^۲ = ۳^۲ = ۹$

$\Rightarrow S = ۶ \times ۹ = ۵۴$

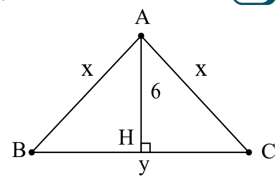
۷۳

$\overset{\triangle}{BHC}\ :\ \widehat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow BH = CH = ۶ = x$

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BH \times (AB + DC) = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times (۸ + ۸ + ۶) = ۶۶$

محیط $ABCD = AB + BC + CD + AD = ۸ + ۶\sqrt{۲} + ۱۴ + ۶ = ۲۸ + ۶\sqrt{۲}$

**۷۴** طبق شکل و فرض سؤال داریم:




محیط $: x + x + y = ۲x + y = ۳۶$

$\overset{\triangle}{ABH}\ :\ x^۲ = ۶^۲ + (\frac{y}{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ + \frac{y^۲}{۴}$

$\Rightarrow x = \sqrt{۳۶ + \frac{y}{۴}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۴۴ + y^۲}}{۲}$

محیط $= ۲x + y = ۳۶ \Rightarrow ۲ \times \frac{\sqrt{۱۴۴ + y^۲}}{۲} + y = ۳۶ \Rightarrow \sqrt{۱۴۴ + y^۲} = ۳۶ - y$

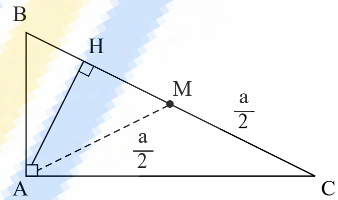
$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۴۴ + y^۲ = (۳۶ - y)^۲$

$\Rightarrow ۱۴۴ + y^۲ = ۱۲۹۶ - ۷۲y + y^۲ \Rightarrow ۷۲y = ۱۱۵۲ \Rightarrow y = ۱۶ \rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۶ = ۴۸$

**۷۵** می‌دانیم «در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه $۱۵^\circ$ باشد ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.»

ضلع $BC = a$ در نظر گرفته و میانهٔ $AM$ و ارتفاع $AH$ را رسم می‌کنیم.

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow \frac{۱}{۸}a^۲ = \frac{۱}{۲}AH \times a$




$\Rightarrow AH = \frac{۱}{۴}a = \frac{۱}{۴}BC \Rightarrow (\widehat{C} = ۱۵^\circ$ این ارتفاع ربع وتر است یعنی$)$

$\Rightarrow \widehat{B} = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ \quad , \quad \widehat{A} = ۹۰^\circ$

**۷۶** کافی است مجموع مساحت‌های سه مربع را یافته و مساحت مثلث سفیدرنگ را از آن کم کنیم:

مربع کوچک $S = ۴^۲ = ۱۶$

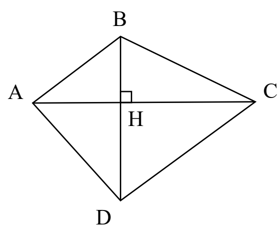
$+$ مربع وسط $S = ۶^۲ = ۳۶$ و مثلث سفید $S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۸ = ۷۲$

مربع بزرگ $S = ۸^۲ = ۶۴$

کل $S = ۱۶ + ۳۶ + ۶۴ = ۱۱۶$

$\Rightarrow$ هاشورخورده $S =$ کل $S - S_\triangle = ۱۱۶ - ۷۲ = ۴۴$

**۷۷** با توجه به شکل داریم:

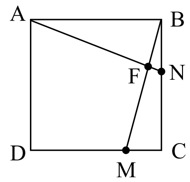



$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۱}{۲}BH \times AC + \frac{۱}{۲}DH \times AC$

$= \frac{۱}{۲}AC\ (BH + DH) = \frac{۱}{۲}AC \times BD$

**۷۸**

$$\begin{cases} AB = BC & \text{(اضلاع مربع)} \\ BN = CM & \text{(فرض)} \\ \widehat{B} = \widehat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABN} \cong \overset{\triangle}{BCM} \Rightarrow \begin{cases} AN = BM \\ \widehat{M} = \widehat{N} \quad (۱) \end{cases}$$




$$\overset{\Delta}{BCM}:\ \widehat{B}+\widehat{M}=90^\circ \xrightarrow{(1)} \widehat{B}+\widehat{N}=90^\circ \quad (2)$$

$$\overset{\Delta}{BFN}:\ \widehat{B}+\widehat{N}=90^\circ \Rightarrow \widehat{F}=90^\circ \Rightarrow AN\perp BM$$

**(۷۹)**

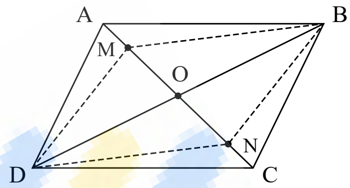
**روش اول:**

$$\left\{\begin{array}{ll} AM=CN & \text{فرض} \\ AB=DC & \\ \widehat{A}_1=\widehat{C}_1 & \text{(خطهای موازی و مورب)} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AMB}\cong\overset{\Delta}{DCN}\Rightarrow MB=DN$$

به‌طریق مشابه $\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ADM}\cong\overset{\Delta}{BCN}\Rightarrow DM=BN$

**می‌دانیم چهارضلعی که اضلاع روبه‌روی آن مساوی باشند متوازی‌الاضلاع است بنابراین چهارضلعی $MBND$ نیز متوازی‌الاضلاع است.**

**روش دوم: در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.**




$$\left.\begin{array}{l} OA=OC \xrightarrow{-(AM=CN)} OM=ON \\ OD=OB \xrightarrow{\qquad\quad} OD=OB \end{array}\right\}$$

**چهارضلعی که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند متوازی‌الاضلاع است در نتیجه $MBND$ متوازی‌الاضلاع است.**

**(۸۰)**

**طبق فرض داریم:**

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=120 \Rightarrow 2n+n^2-3n=240$$

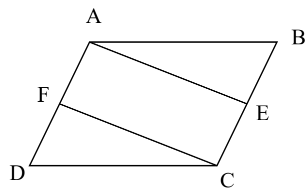
$$\Rightarrow n^2-n-240=0 \Rightarrow (n-16)(n+15)=0 \quad \begin{cases} n=-15 & \text{غ ق ق} \\ n=16 & \text{ق ق} \end{cases}$$

**۱۶ضلعی است.**

$$\begin{cases} \text{مجموع زاویه‌های داخلی}=(n-2)\times 180^\circ=14\times 180^\circ=2520^\circ \\ \text{مجموع زاویه‌های خارجی}=360^\circ \end{cases}$$

**نکته: مجموع زاویه‌های خارجی تمام $n$ضلعی‌ها برابر $360^\circ$ است.**

**(۸۱)**




**اثبات: می‌دانیم در هر چهارضلعی، اگر دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آنگاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.**

$$\begin{cases} AD\parallel BC \Rightarrow AF\parallel EC \\ AD=BC \xrightarrow{\div 2} AF=EC \end{cases} \Rightarrow AF \overset{\parallel}{=} EC \Rightarrow AECF\ \text{متوازی‌الاضلاع است}$$

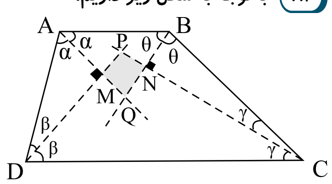
**(۸۲)**

$$\text{تعداد قطرها}=\frac{n(n-3)}{2}=54 \Rightarrow n^2-3n=108 \Rightarrow n^2-3n-108=0$$

$$\Rightarrow (n-12)(n+9)=0 \quad \begin{cases} n=12 & \text{ق ق} \\ n=-9 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی}=(n-2)\times 180^\circ=(12-2)\times 180^\circ=1800^\circ$$

**(۸۳)** **با توجه به شکل زیر داریم:**

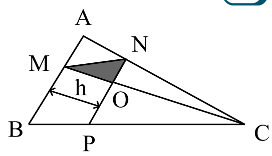



$$\alpha=\frac{\hat{A}}{2},\ \beta=\frac{\hat{D}}{2},\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=90^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \hat{M}=90^\circ$$

$$\theta=\frac{\hat{B}}{2},\ \gamma=\frac{\hat{C}}{2},\ \hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=90^\circ \Rightarrow \theta+\gamma=90^\circ \Rightarrow \hat{N}=90^\circ$$

در چهارضلعی $MPNQ$ دو زاویهٔ روبه‌روی آن قائمه است.

**۸۴**




$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} : NP \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{NP}{AB} \\ \overset{\triangle}{ACM} : ON \parallel AM \Rightarrow \dfrac{ON}{AM} = \dfrac{CN}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{ON}{AM} = \dfrac{NP}{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{ON}{NP} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{۲}{۲+۳} = \dfrac{۲}{۵} \\ \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ONM}}}{S_{MNPB}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}ON \times h}{NP \times h} = \dfrac{ON}{۲NP} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{MNPB}} = \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۲}{۵} = \dfrac{۱}{۵}$$

**۸۵**

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{B} = ۴۵^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{AH}{OA}$$

$$BD = \sqrt{۲}AB = ۲۰\sqrt{۲} \Rightarrow \dfrac{a}{\cancel{۲۰\sqrt{۲}}_{۲}} = \dfrac{۱۰\sqrt{۲} - a}{\cancel{۱۰\sqrt{۲}}_{۱}} \Rightarrow ۲۰\sqrt{۲} - ۲a = a$$

$$\Rightarrow ۳a = ۲۰\sqrt{۲} \Rightarrow a = \dfrac{۲۰\sqrt{۲}}{۳}$$

**۸۶**

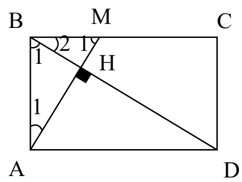
می‌دانیم دو $n$ضلعی منتظم با تعداد اضلاع مساوی متشابه هستند. پس:

$$\text{نسبت تشابه} = \dfrac{۲}{۳} = \dfrac{۴۰}{۶۰} = \text{نسبت محیط‌ها}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = (\text{نسبت تشابه})^۲ = \left(\dfrac{۲}{۳}\right)^۲ = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow \dfrac{۴}{۹} = \dfrac{S}{S'} \Rightarrow \dfrac{۴}{۴+۹} = \dfrac{S}{S+S'}$$

$$\Rightarrow \dfrac{۴}{۱۳} = \dfrac{S}{۲۰۸} \Rightarrow S = \dfrac{۴ \times ۲۰۸}{۱۳} = ۶۴cm^۲ \to S' = ۲۰۸ - ۶۴ = ۱۴۴cm^۲$$

**۸۷**




$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ + \hat{B}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ = \hat{M}_۱ \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{BMA}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AD}{AB}}_{*} = \dfrac{BD}{AM} \xrightarrow{*} \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{۳AB}{AB} \Rightarrow BM = \dfrac{۱}{۳}AB \Rightarrow \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{۳AB}{\frac{۱}{۳}AB} = ۹$$

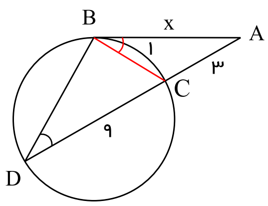
**۸۸**

$$\left.\begin{array}{l} \hat{N}_۱ = \hat{A} \quad \text{فرض} \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۱ \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{MNB} \sim \overset{\triangle}{BAD} \to \dfrac{MB}{BD} = \dfrac{MN}{AD} = \dfrac{NB}{AB}$$

$$\Rightarrow \dfrac{MN}{۱۵} = \dfrac{۱۲}{۲۰} \Rightarrow MN = \dfrac{۱۵ \times ۱۲}{۲۰} = ۹ \Rightarrow MN = ۹$$

**۸۹** در شکل (الف) داریم:

از $B$ به $C$ وصل می‌کنیم.

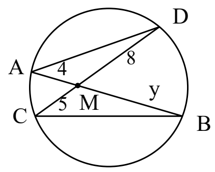



$$\left.\begin{array}{l} (\text{ظلّی}) \quad \hat{B}_۱ = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{A} = \hat{A} \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADB}$$

$$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \dfrac{۳}{x} = \dfrac{x}{۳+۹} \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \sqrt{۳۶} = ۶$$

در شکل (ب) داریم:

از $A$ به $D$ و از $B$ به $C$ وصل می‌کنیم.




$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \hat{D}=\hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{M}AD\sim\overset{\Delta}{M}CB$$

$$\Rightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{y}\Rightarrow y=\frac{۵\times۸}{۴}=۱۰$$

(۹۰)

با توجه به شکل داریم:

$$O\overset{\Delta}{A}B: x^{۲}=۱۰^{۲}-۶^{۲}=۱۰۰-۳۶=۶۴\rightarrow x=۸$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}=۹۰^\circ\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{زز})}O\overset{\Delta}{A}B\sim O\overset{\Delta}{C}D\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{z}=\frac{۶}{y}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}z=\dfrac{۱۰\times۱۲}{۸}=۱۵\\ y=\dfrac{۶\times۱۲}{۸}=۹\end{array}\right.$$

(متقابل به راس)

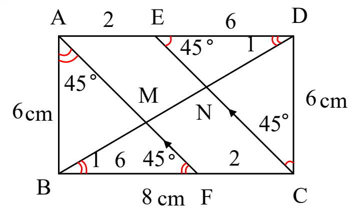
(۹۱) وقتی دو مستطیل متشابه باشند، نسبت اضلاع با نسبت قطرها برابر می‌شود.

$$\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{y}=\frac{۵}{x}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{۴\times۶}{۳}=۸\\ x=\dfrac{۵\times۶}{۳}=۱۰\end{array}\right.$$

(۹۲)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{۳}{۲}\\ \dfrac{AN}{NC}=\dfrac{۳/۶}{۲/۴}=\dfrac{۳}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}MN\parallel BC$$

(۹۳)




$$\overset{\Delta}{AB}D: AB^{۲}+AD^{۲}=BD^{۲}\Rightarrow۶^{۲}+۸^{۲}=BD^{۲}\Rightarrow BD=۱۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AB}F:\hat{A}=\hat{F}=۴۵^\circ\Rightarrow AB=BF=۶cm\\ \overset{\Delta}{DC}E:\hat{C}=\hat{E}=۴۵^\circ\Rightarrow DE=DC=۶cm\\ \hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{AB}F\cong\overset{\Delta}{DC}E\Rightarrow AF=CE$$

$$\left.\begin{array}{l}AD\parallel BC\xrightarrow{\text{مورب } BD}\hat{D}_۱=\hat{B}_۱\\ \hat{E}=\hat{F}=۴۵^\circ\\ DE=BF=۶cm\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}}\overset{\Delta}{DE}N\cong\overset{\Delta}{BF}M\Rightarrow BM=DN$$

$$\overset{\Delta}{AM}D: EN\parallel AM\xrightarrow{\text{ق تالس}}\frac{DE}{AD}=\frac{DN}{DM}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{DN}{DM}\xrightarrow{\text{ترکیب صورت و مخرج}}\frac{۶}{۱۴}=\frac{DN}{\underbrace{DM+DN}_{BD}}$$

$$\Rightarrow\frac{۶}{۱۴}=\frac{DN}{۱۰}\Rightarrow DN=\frac{۳۰}{۷}=BM\Rightarrow MN=۱۰-۲\times\frac{۳۰}{۷}=\frac{۱۰}{۷}$$

(۹۴)

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow\frac{۱۲}{x}=\frac{۹}{۱۵}\rightarrow x=\frac{۱۲\times۱۵}{۹}=۲۰$$

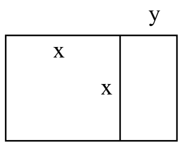
(۹۵)

طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AB}C : DE \parallel BC \xrightarrow{\text{ق تالس}} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \\ \overset{\Delta}{AB}F : DC \parallel BF \xrightarrow{\text{ق تالس}} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AC}{CF}$$

**۹۶** مطابق شکل زیر، طول ضلع مربع را $x$ و عرض مستطیل کوچک‌تر را $y$ در نظر می‌گیریم. نسبت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \to ۱ + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$




ما $A = \frac{x}{y}$ را می‌خواهیم:

$$۱ + \frac{۱}{A} = A$$

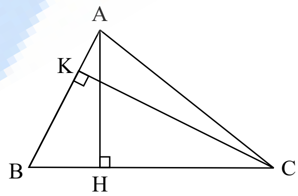
$$\to A^۲ - A - ۱ = ۰ \to \Delta = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ A = \dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \quad \text{(غ.ق.ق، چون منفی است)} \end{cases}$$

درنتیجه، $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = \frac{x}{y}$ این نسبت در علم ریاضیات به عدد طلایی معروف است.

**۹۷**

$$\frac{۱۵x - ۳y}{۲x + ۵y} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۴۵x - ۹y = ۸x + ۲۰y \Rightarrow ۳۷x = ۲۹y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۲۹}{۳۷}$$

**۹۸**




$$\text{حکم :} \; \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{BC}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AB}C} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} CK \times AB$$

$$\Rightarrow AH \times BC = CK \times AB \Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{BC}$$

**۹۹**

$$۸ \times ۱۵ \times ۳^۳ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ \times ۳^۳ = ۲^۳ \times ۳^۴ \times ۵^۱$$

$$a^۲ = bc \Rightarrow a^۲ = (۲ \times ۳^۴ \times ۵^۳) \times (۲^۳ \times ۳^۴ \times ۵^۱) = ۲^۴ \times ۳^۸ \times ۵^۴ \Rightarrow a = ۲^۲ \times ۳^۴ \times ۵^۲ = ۸۱۰۰$$

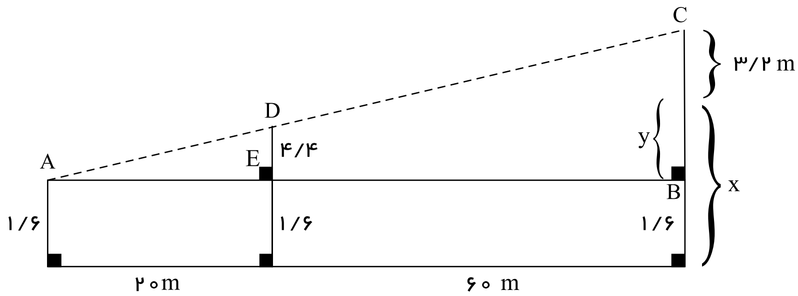
**۱۰۰**

با توجه به شکل زیر داریم:

$$\overset{\Delta}{AD}E \sim \overset{\Delta}{AC}B \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۴/۴}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = ۱۷/۶ \Rightarrow y = ۱۷/۶ - ۳/۲ = ۱۴/۴$$

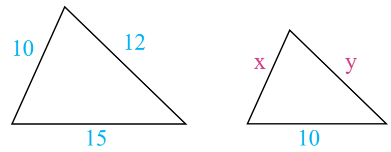
$$x = ۱۴/۴ + ۱/۶ = ۱۶m \quad \text{(ارتفاع ساختمان)}$$



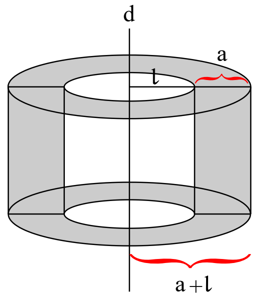

**۱۰۱**

$$\text{دو مثلث متشابهند.} \Rightarrow \frac{۱۰}{x} = \frac{۱۲}{y} = \frac{۱۵}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳} , y = ۸$$

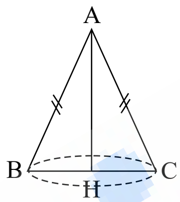
$$\text{محیط} = \frac{۲۰}{۳} + ۱۰ + ۸ = \frac{۲۰ + ۳ \times ۱۸}{۳} = \frac{۷۴}{۳}$$



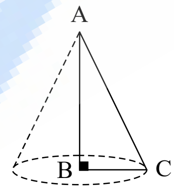

**۱۰۲** شکل حاصل از این دوران، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ $a+\ell$ است که در داخل این استوانه، استوانهٔ دیگری به شعاع قاعدهٔ $\ell$ است و این استوانهٔ درونی یک استوانهٔ خالی است.



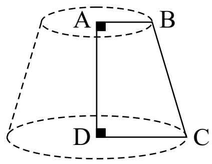

**۱۰۳** الف) حول ارتفاع وارد بر قاعده، تشکیل یک مخروط قائم می‌دهد.



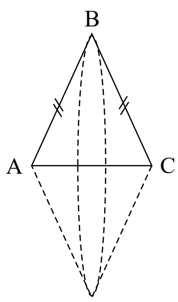

ب) مخروط



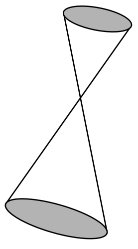

پ) مخروط ناقص




ت) دو مخروط کاملاً یکسان که از قاعده به یکدیگر چسبیده‌اند.

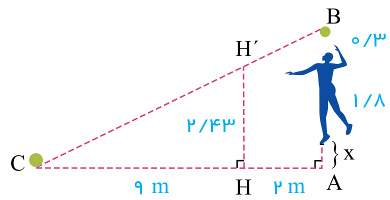



**۱۰۴** جسم حاصل دو مخروط است که از رأس به هم چسبیده‌اند.



**۱۰۵** دایره - مخروط قائم

**۱۰۶** طبق قضیهٔ تالس در شکل زیر داریم:




$$\overset{\Delta}{ABC} : HH'||AB \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{CH}{AC} = \frac{HH'}{AB} \Rightarrow \frac{۹}{۱۱} = \frac{۲/۴۳}{x + ۱/۸ + ۰/۳} \Rightarrow ۹x + ۱۸/۹ = ۲۶/۷۳ \Rightarrow ۹x = ۷/۸۳ \Rightarrow x = \frac{۷/۸۳}{۹} = ۰/۸۷$$

بنابراین، $۸۷cm$ پرش داشته است.

**۱۰۷** الف) مستطیل    ب) مثلث متساوی‌الساقین    ج) ذوزنقه

**۱۰۸** در این مکعب، تعداد مکعب‌های کوچک برابر است با: $۴۸ = ۱۶ \times ۳$ مکعب

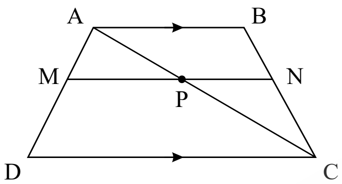
- حداقل ۱۵ تا و حداکثر ۳۷ تا

**۱۰۹** کل وجه‌ها $۴۸ = ۸ \times ۶$

در ۱۵ وجه حرف $A$ دیده نمی‌شود پس در $۳۳ = ۱۵ - ۴۸$ وجه حرف $A$ دیده می‌شود.

**۱۱۰**

**اثبات:** قطر $AC$ را رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADC} : \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \\ \overset{\Delta}{ACB} : \frac{BN}{NC} = \frac{AP}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

**۱۱۱**

طبق فرمول پیک داریم:

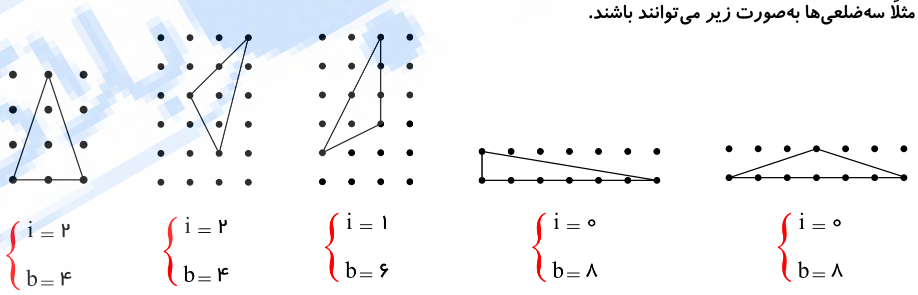
$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۳ \Rightarrow b + ۲i = ۸$$

از طرفی می‌دانیم $b \geq ۳$ و $i \geq ۰$ در نتیجه، $۸ - b \geq ۰$ پس $۳ \leq b \leq ۸$.

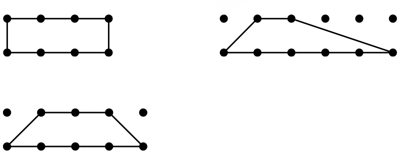
چون $b = ۲(۴ - i)$ پس باید $b$ نیز زوج باشد در نتیجه $b$ می‌تواند فقط یکی از سه مقدار $\{۴, ۶, ۸\}$ را اختیار کند. بنابراین می‌توان $i$ را نیز محاسبه کرد.

| $b$ | ۴ | ۶ | ۸ |
|---|---|---|---|
| $i$ | ۲ | ۱ | ۰ |

می‌توانیم تعدادی را رسم کنیم. مثلاً سه‌ضلعی‌ها به‌صورت زیر می‌توانند باشند.




وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارد که $b = ۸$ و $i = ۰$؛ سه نمونه چهارضلعی نظیر آن به‌صورت زیر است.



با تغییر دو نقطهٔ بالایی می‌توان ذوزنقه‌های دیگری نیز رسم کرد.

**۱۱۲** عمود

**۱۱۳** موازی

**۱۱۴** فقط یک خط

**۱۱۵** الف) $(AB, DE), (AC, DF), (BC, EF)$

ب) $(AC, BE), (EF, AD), (AB, CF)$

ج) $(AB, BC), (DF, CF), (AD, DE)$

د) $(AB, BC, BE), (AC, BC, CF), \cdots$

هـ) (خط $BE$ , صفحه $ACFD$)(خط $CF$ , صفحه $ABED$) (خط $AD$ , صفحه $BCFE$)

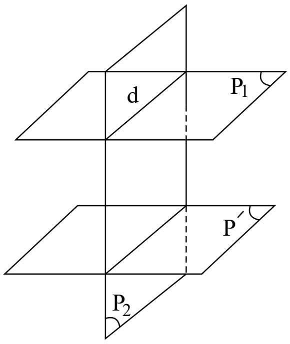
و) $(ABC, \ DEF)$

ز) $(ACFD, BCFE, ABED)$

**۱۱۶** الف) هریک از صفحات $EFIH$ و $FGIJ$ بر صفحهٔ $ABCD$ منطبق هستند.

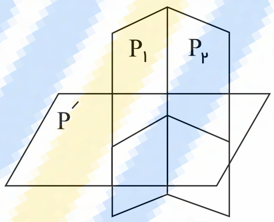
ب) موازی    ج) متقاطع    د) منطبق    هـ) موازی    و) هر خط دلخواه بر هر صفحهٔ دلخواه واقع است.

**۱۱۷** الف) متقاطع

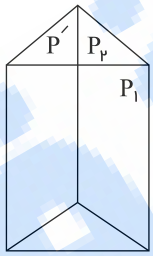



ب) در سه حالت (۱)، (۲) و (۳) متقاطع است و در حالت (۴) موازی است.

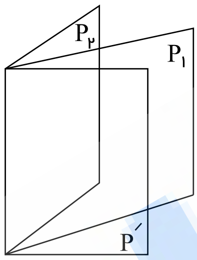
(۱)

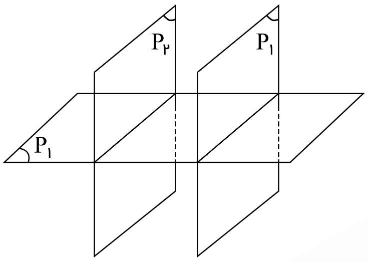



(۲)

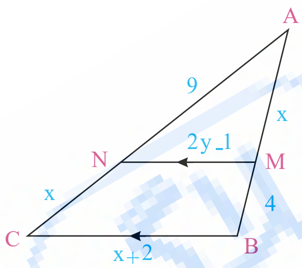



(۳)



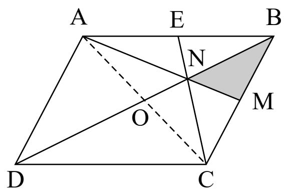

**۱۱۸** طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{۹}{x}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow \frac{۶}{۱۰}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲۰y-۱۰=۴۸\Rightarrow ۲۰y=۵۸\Rightarrow y=\frac{۵۸}{۲۰}=۲٫۹$$

**۱۱۹** از $C$ به $N$ وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا ضلع $AB$ را در نقطه‌ای مانند $E$ قطع کند. نقطهٔ $N$ محل همرسی میانه‌های مثلث $ABC$ است، پس خواهیم داشت:

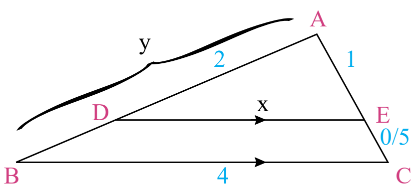



$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۲}$$

توجه کنید که $AM$ میانهٔ $BC$ و $BO$ نیز میانهٔ $AC$ است.

**۱۲۰** طبق قضیهٔ تالس:

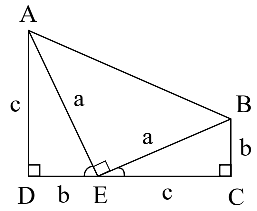



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{y}=\frac{۱}{۱٫۵}=\frac{x}{۴}$$

$$\Rightarrow y=AB=۳cm \quad , \quad x=DE=\frac{۴}{۱٫۵}=\frac{۸}{۳}$$

**۱۲۱** با توجه به شکل داریم:




$$S_{\text{ذوزنقه}} = S_{\overset{\triangle}{ADE}} + S_{\overset{\triangle}{BCE}} + S_{\overset{\triangle}{ABE}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{bc}{۲} + \frac{a^۲}{۲} + \frac{bc}{۲} = \frac{۱}{۲}(a^۲ + ۲bc)$$

$$\text{از طرفی}: S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(b+c)(b+c)}{۲} = \frac{۱}{۲}(b+c)^۲ = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ + ۲bc)$$

با مساوی قرار دادن دو رابطهٔ بالا داریم:

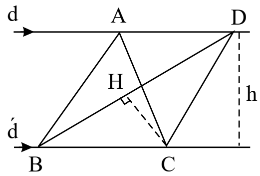
$$\frac{۱}{۲}(a^۲ + ۲bc) = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ + ۲bc) \xrightarrow{\times ۲} a^۲ + ۲bc = b^۲ + c^۲ + ۲bc \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

و این اثباتی برای قضیهٔ فیثاغورس است.

**۱۲۲**

فرض: $\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۸cm^۲ \\ BD = ۶cm \end{cases}$

حکم: $CH = ?$




دو مثلث $ABC$ و $DBC$ قاعدهٔ مشترک $BC$ را دارند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها روی یک خط، موازی این قاعده قرار دارد، پس این دو مثلث مساحت یکسانی دارند:

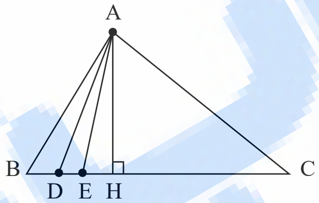
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{DBC}} = ۸cm^۲$$

$$S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}h \times BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}CH \times BD \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times CH \times ۶ = ۸cm^۲ \Rightarrow CH = \frac{۸}{۳}cm$$

**۱۲۳**

فرض: $S_{\overset{\triangle}{ACE}} = ۳S_{\overset{\triangle}{ADE}} = ۲S_{\overset{\triangle}{ABD}}$

حکم: $\frac{BC}{DE} = ?\ ,\ \frac{DE}{BD} = ?$




ارتفاع $AH$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times CE = ۳ \times \cancel{\frac{۱}{۲} \times AH} \times DE \Rightarrow CE = ۳DE \\ \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times CE = ۲ \times \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BD \Rightarrow CE = ۲BD \end{array}\right\} \Rightarrow ۳DE = ۲BD \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{DE} = \frac{\frac{۳}{۲}DE + DE + ۳DE}{DE} = \frac{۳}{۲} + ۴ = \frac{۱۱}{۲}$$

**۱۲۴** چون در هرکدام از دو متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل، قاعده‌ها برابر با $AB$ و ارتفاع‌ها برابر با فاصلهٔ دو خط موازی است، بنابراین:

$$S_۱ = S_۲ = AB \times h = S$$

**۱۲۵**

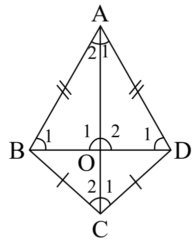
واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط فوق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a^۲ = bc \to a^۲ = ۱۰ \times ۸ = ۸۰ \to a = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵} \to \text{طول پاره‌خط}$$

**۱۲۶** طبق فرض داریم:

$$\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{x+y+z}{۲+۳+۶} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x+y+z = \frac{۱۱ \times ۳}{۵} = \frac{۳۳}{۵}$$

**۱۲۷** با توجه به شکل زیر داریم:




$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ BC = CD \\ AC = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{array}\right.$$

یعنی $AC$ نیمساز زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

$$AB = AD \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین است } \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AB = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} O\overset{\triangle}{A}B \cong O\overset{\triangle}{A}D$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ , \quad \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \text{است } BD \text{ عمودمنصف } AC \\ OB = OD \end{array}\right.$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ = ۹۰^\circ$ یعنی دو قطر $AC$ و $BD$ بر هم عمود هستند. پس:

$$S = \frac{AC \times BD}{۲} = \frac{۶ \times ۸}{۲} = ۲۴$$

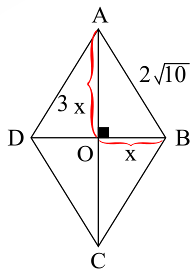
**۱۲۸** الف) هر لوزی یک مربع است. $\xleftarrow{\text{نقیض گزاره}}$ یک لوزی وجود دارد که مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست ← هر مستطیلی یک مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد ← مثلثی وجود دارد که دارای بیش از یک زاویهٔ قائمه است.

ت) مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب برابر $۳۶۰^\circ$ است. ← چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن $۳۶۰^\circ$ نیست (یا کمتر یا بیشتر از $۳۶۰^\circ$ است)

**۱۲۹** با توجه به اینکه نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است، با توجه به شکل $OB = x$ و $OA = ۳x$ در نظر می‌گیریم. داریم:



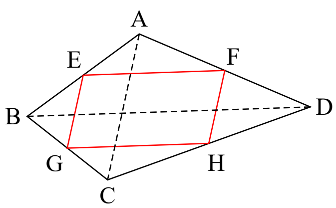

$$\overset{\triangle}{AOB} : x^۲ + (۳x)^۲ = (۲\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow x^۲ + ۹x^۲ = ۴۰ \Rightarrow ۱۰x^۲ = ۴۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = ۲ \\ OA = ۳(۲) = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow AC = ۲ \times ۶ = ۱۲ \ , \quad BD = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$\text{لوزی } S = \frac{AC \times BD}{۲} = \frac{۱۲ \times ۴}{۲} = ۲۴$$

**۱۳۰**

با توجه به شکل داریم:




$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB \text{ وسط } E \\ AD \text{ وسط } F \end{array}\right\} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} EF \parallel BD \\ \left.\begin{array}{l} CD \text{ وسط } H \\ BC \text{ وسط } G \end{array}\right\} \rightarrow \frac{CH}{CD} = \frac{CG}{CB} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} GH \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel GH$$

به‌طور مشابه و با در نظر گرفتن پاره‌خط‌های $EG$ و $FH$ می‌توان ثابت کرد که $EG \parallel FH$. بنابراین در چهارضلعی $EFHG$ اضلاع مقابل با یکدیگر موازی هستند. بنابراین چهارضلعی $EFGH$ متوازی‌الاضلاع است.

– اگر دو قطر چهارضلعی $ABCD$ هم‌اندازه باشند، چهارضلعی حاصل لوزی است.

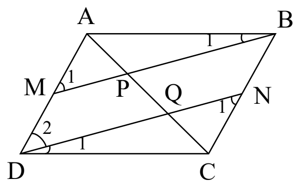
– اگر دو قطر چهارضلعی $ABCD$ برهم عمود باشند، چهارضلعی حاصل مستطیل است.

– محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع اندازهٔ قطرهای چهارضلعی اصلی. زیرا با توجه به قضیهٔ تالس و عکس آن می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{EG}{AC}=\dfrac{FH}{AC}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow EG+FH=AC\\[2mm] \dfrac{EF}{BD}=\dfrac{GH}{BD}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow EF+GH=BD\end{array}\right\}\Rightarrow EG+FH+FE+GH=AC+BD$$

**۱۳۱**

با توجه به شکل داریم:



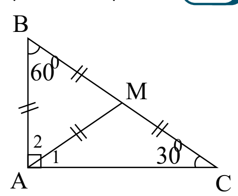

$$AD=BC\xrightarrow{\div ۲}\frac{AD}{۲}=\frac{BC}{۲}\Rightarrow AM=CN$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AM=CN\\ AB=CD\\ \hat{A}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{AMB}\cong\overset{\Delta}{CND}\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{N}_۱\\[2mm] AD\parallel BC\xrightarrow{\text{مورب } DN}\hat{N}_۱=\hat{D}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۲$$

با توجه به عکس قضیهٔ خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت: $DN\parallel BM$

$$DN\parallel BM\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}QN\parallel BP\xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس در } \overset{\Delta}{PBC}}\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{QC}{PQ}=۱\Rightarrow PQ=QC\quad(۱)\\[2mm] MP\parallel DQ\xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس در } \overset{\Delta}{ADQ}}\dfrac{AM}{DM}=\dfrac{AP}{PQ}=۱\Rightarrow AP=PQ\quad(۲)\end{array}\right.$$

**۱۳۲** می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. پس:




$$AM=MC\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_۱=۳۰^\circ\\ \hat{A}_۲=۶۰^\circ\end{array}\right.$$

بنابراین $\overset{\Delta}{ABM}$ متساوی‌الاضلاع است و خواهیم داشت:

$$AB=BM=\frac{BC}{۲}$$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲\Rightarrow AC^۲=BC^۲-AB^۲=BC^۲-(\frac{BC}{۲})^۲$$

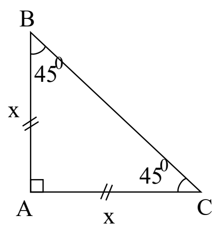
$$\Rightarrow AC^۲=BC^۲-\frac{BC^۲}{۴}=\frac{۳BC^۲}{۴}\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$$

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم در مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ ضلع مقابل به زاویهٔ $۴۵^\circ$ برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است. برای این کار در مثلث $ABC$ بنا به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲=x^۲+x^۲=۲x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=\frac{BC^۲}{۲}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{BC^۲}{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}BC$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$$

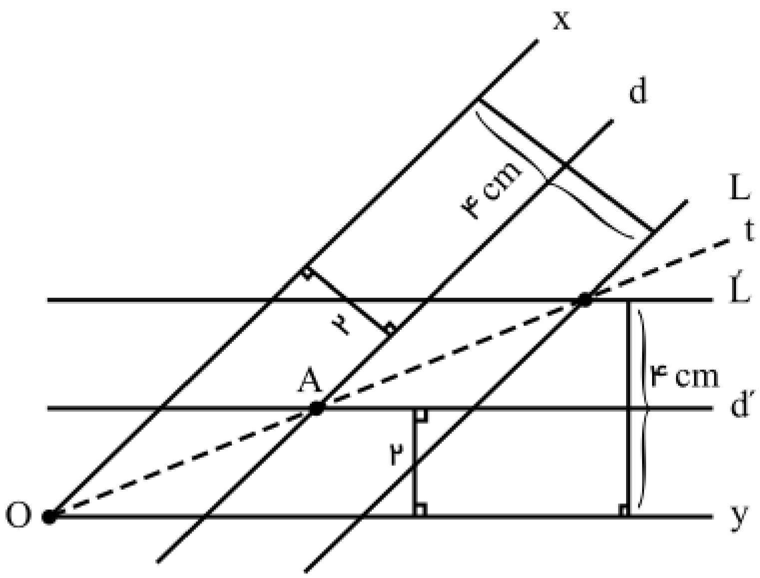



**۱۳۳**

الف) زاویهٔ $x\hat{o}y$ را در نظر می‌گیریم. خطوط $d$ و $d'$ را موازی اضلاع $ox$ و $oy$ و به فاصلهٔ $۲cm$ از آنها ترسیم می‌کنیم محل برخورد آنها از هر دو ضلع $۲cm$ فاصله دارد. (نقطهٔ $A$)

ب) بار دیگر خطوط $L$ و $L'$ را به موازات $۴cm$ از دو ضلع رسم می‌کنیم تا نقطهٔ $B$ به‌دست آید. نقطهٔ $B$ از دو ضلع به فاصلهٔ $۴cm$ است.

پ) از $O$ به $A$ و $B$ رسم کرده و امتداد می‌دهیم. این نیم‌خط نیمساز زاویه است. $(ot)$



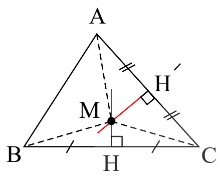

**۱۳۴**

در $n$ضلعی، تعداد قطرها برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است، پس طبق فرض داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = n \Rightarrow n^۲ - ۳n = ۲n \Rightarrow n^۲ - ۵n = ۰ \Rightarrow n(n-۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = ۰ & \text{غ ق ق} \\ n = ۵ & (\text{۵ ضلعی}) \end{cases}$$

**۱۳۵** می‌دانیم دو عمودمنصف هر دو ضلع دلخواه مثلث حتماً متقاطع‌اند، بنابراین عمود منصف‌های اضلاع $AC$ و $BC$ همدیگر را در نقطهٔ $M$ قطع می‌کنند.



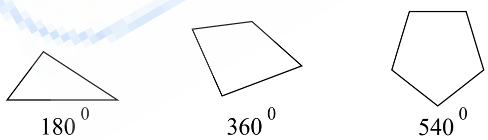

از $M$ به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (M \text{ روی عمودمنصف } AC) : MA = MC \\ (M \text{ روی عمودمنصف } BC) : MB = MC \end{array}\right\} \rightarrow MA = MB$$

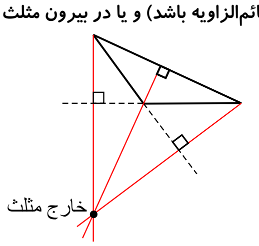
یعنی $M$ روی عمودمنصف $AB$ است چون از دو سر ضلع $AB$ به یک فاصله است.

**۱۳۶**

| تعداد اضلاع | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مجموع زوایا | $۱۸۰^\circ$ | $۳۶۰^\circ$ | $۵۴۰^\circ$ | $۷۲۰^\circ$ | | $(n-۲) \times ۱۸۰^\circ$ |




**۱۳۷** خیر درست نیست زیرا محل برخورد ارتفاع‌های یک مثلث، یا داخل مثلث قرار دارد (هر سه زاویه تند باشد) یا روی مثلث (رأس قائمه) قرار دارد (قائم‌الزاویه باشد) و یا در بیرون مثلث قرار دارد (یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد).



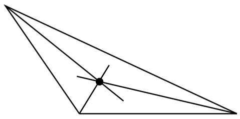

**۱۳۸** روش نتیجه گیری براساس چند تجربه یا مشاهده یا آزمایش جزئی که نتایج آن ممکن است درست یا نادرست باشد، راه استدلال استقرایی می‌نامند.

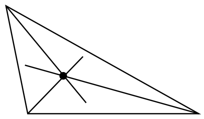
مثال ۱:

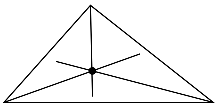
$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{۲} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۶} \\ \sqrt{۳} \times \sqrt{۷} = \sqrt{۲۱} \\ \sqrt{۵} \times \sqrt{۶} = \sqrt{۳۰} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ یک عدد گنگ می‌شود.

که در اینجا این نتیجه‌گیری غلط است. به مثال نقض روبه‌رو توجه کنید: $\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۶} = ۴ \in Q$

مثال ۲:


محل برخورد نیمسازها داخل مثلث قرار دارد

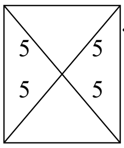

محل برخورد نیمسازها داخل مثلث قرار دارد

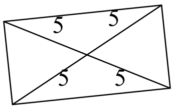

محل برخورد نیمسازها داخل مثلث قرار دارد

نتیجه: «محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث در داخل مثلث قرار دارد.»

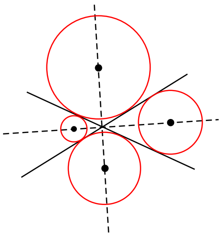
که این نتیجه‌گیری درست است.

۱۳۹ مستطیلی که طول قطرهای آن $۱۰cm$ باشد، در صورت مشخص بودن زاویهٔ بین دو قطر قابل رسم است، ولی بدون در نظر گرفتن اندازهٔ این زاویه، بی‌شمار جواب دارد و برای رسم هرکدام از جواب‌ها کافی است از نقطهٔ مشترک دو خط متقاطع، کمان‌هایی به طول $۵cm$ بر نیم و چهار نقطهٔ حاصل را به‌هم وصل کنیم.

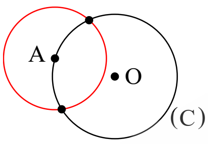



۱۴۰ مرکز دایره‌هایی که بر دو خط $d$ و $d'$ مماس باشند، مطابق شکل، روی نیمسازهای چهار زاویه بین دو خط قرار دارد.

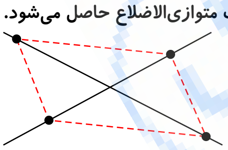


۱۴۱ دایرهٔ $C$ به مرکز $O$ و به شعاع $۶cm$ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ $A$ روی دایرهٔ $C$ یک دایره به شعاع $۴cm$ رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره با دایرهٔ $C$ جواب‌های مسأله است. مطابق شکل، این سؤال ۲ جواب دارد.

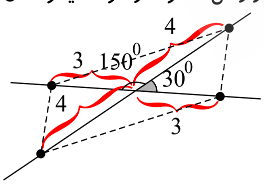



۱۴۲ می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگر بوده و با اضلاع لوزی مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند و بنابراین شکل لوزی داده‌شده باید به‌صورت زیر باشد. مسأله جواب ندارد چون غیرممکن است طول وتر مثلث قائم‌الزاویه از طول ضلع زاویهٔ قائمه کمتر باشد.

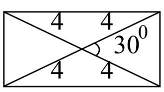
۱۴۳ دو خط متقاطع رسم کرده و روی خط اول $۴/۵cm$ در دو طرف و روی خط دوم $۲/۵cm$ در دو طرف انتخاب می‌کنیم. از به‌هم وصل کردن این نقاط یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود. مسأله بی‌شمار جواب دارد. چون بی‌شمار خطوط متقاطع با زاویهٔ بین دلخواه می‌توان رسم کرد.



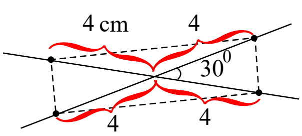
۱۴۴ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین ابتدا یک زاویهٔ متقابل به رأس $۱۵۰^\circ$ (یا $۳۰^\circ$) رسم کرده و روی یک خط و از رأس مشترک و طرف دیگر همان خط $۴cm$ و روی ضلع دیگر زاویه و امتداد آن $۳cm$ جدا می‌کنیم و به یکدیگر وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع خواسته شده است.



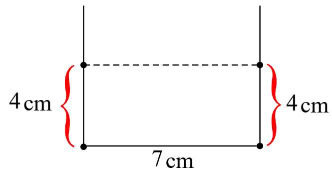

۱۴۵ شکل تقریبی به‌صورت مقابل است.




بنابراین ابتدا یک زاویهٔ $۳۰^\circ$ رسم کرده و دو ضلع آن را از سمت رأس امتداد می‌دهیم و روی این چهار نیم‌خط پاره‌خط‌هایی به طول $۴cm$ جدا کرده و به یکدیگر وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل (مستطیل) جواب مسأله است.

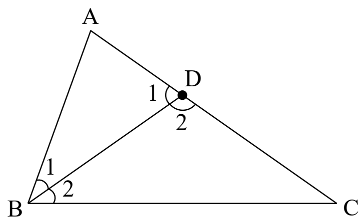



۱۴۶ ابتدا پاره‌خطی به طول $۷cm$ را رسم کرده و از دو سر آن دو پاره‌خط به اندازهٔ $۴cm$ (از یک طرف) عمود خارج کرده و نقاط حاصل را به یکدیگر وصل می‌کنیم.




**۱۴۷**

$\begin{cases} AB > AD \\ BC > DC \end{cases}$ : حکم $\rightarrow$ $\widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲$ : فرض




**قضیه: در هر مثلث ضلع روبه‌روی هر زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.**

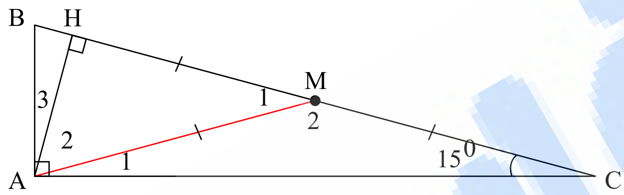
$\overset{\Delta}{ABD}: \quad \widehat{D}_۲ = \widehat{A} + \widehat{B}_۱ \rightarrow \widehat{D}_۲ > \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲$

$\overset{\Delta}{CBD}: \widehat{D}_۲ > \widehat{B}_۲ \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} BC > DC$

$\overset{\Delta}{BDC}:$ خارجی $\widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۲ = \widehat{B}_۱ \rightarrow \overset{\Delta}{ABD}: \widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۱ \xrightarrow{\text{طبق قضیة}} AB > AD$

**۱۴۸**

$AH = \frac{۱}{۴}BC$ : حکم $\quad$ $\begin{cases} \widehat{A} = ۹۰^\circ \\ \widehat{C} = ۱۵^\circ \\ \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{cases}$ : فرض




**اثبات: میانهٔ $AM$ را رسم می‌کنیم، می‌دانیم $AM$ نصف وتر است یعنی:** $AM = MC$ و در نتیجه $\widehat{A}_۱ = \widehat{C} = ۱۵^\circ$.

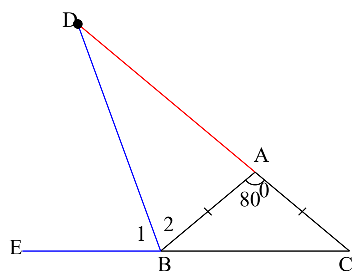
$\overset{\Delta}{AMC}:$ خارجی $\widehat{M}_۱ = \widehat{A}_۱ + \widehat{C} = ۱۵^\circ + ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$

$\overset{\Delta}{AHM}: \widehat{M}_۱ = ۳۰^\circ \xrightarrow{\text{طبق فرض}} AH = \frac{۱}{۲}AM = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}BC) = \frac{۱}{۴}BC$

**توجه: در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AHM$ ضلع روبه‌روی زاویهٔ $۳۰^\circ$، برابر نصف وتر است.** $(AH = \frac{۱}{۲}AM)$

**۱۴۹**

$\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \end{cases}$ : فرض $\quad$ $\widehat{D} = ?$ : حکم




$\overset{\Delta}{ABC}: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{B} = \widehat{C}} ۸۰^\circ + ۲\widehat{B} = ۱۸۰^\circ \rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = ۵۰^\circ$

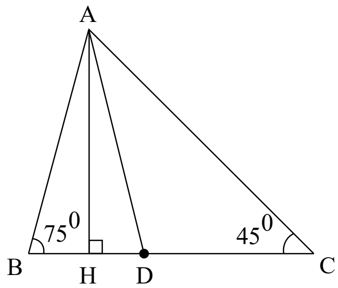
$E\widehat{B}A = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ \rightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ = ۶۵^\circ$

$\overset{\Delta}{BDC}: \underset{۶۵^\circ + ۵۰^\circ}{\underset{\downarrow}{\widehat{B}}} + \widehat{D} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۱۱۵^\circ + \widehat{D} + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \widehat{D} = ۱۵^\circ$

**۱۵۰** **مطابق شکل داریم:**

فرض : $B\widehat{A}D = D\widehat{A}C$ حکم : $H\widehat{A}D = ?$

$\overset{\triangle}{ABC} : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \to \widehat{A} + ۷۵^\circ + ۴۵^\circ = ۱۸۰^\circ$



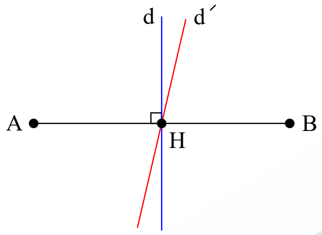

$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ \to D\widehat{A}C = ۳۰^\circ$

$\overset{\triangle}{ADC}$ : خارجی $\widehat{D} = D\widehat{A}C + \widehat{C} = ۳۰^\circ + ۴۵^\circ = ۷۵^\circ$

$\overset{\triangle}{HAD} : \widehat{H} + \widehat{D} + H\widehat{A}D = ۱۸۰^\circ \to ۹۰^\circ - ۷۵^\circ + H\widehat{A}D = ۱۸۰^\circ \Rightarrow H\widehat{A}D = ۱۵^\circ$

**۱۵۱** فرض کنیم پاره‌خط $AB$ دو عمود منصف دارد.

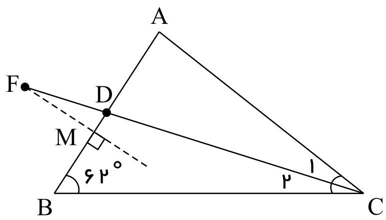
$\begin{matrix} d \perp AB \\ d' \perp AB \end{matrix}$ ، $d \cap d' \cap AB = H$




یعنی دو خط $d$ و $d'$ در نقطهٔ $H$ بر $AB$ عمود شده‌اند ولی این خلاف اصول است که «از یک نقطه فقط یک عمود می‌توان بر آن خط، رسم کرد.» پس فرض خلف باطل و خود حکم که عمود منصف یکتاست، ثابت می‌شود.

**۱۵۲**

$\begin{cases} \text{فرض} : AM = MB \quad \text{حکم} : D\widehat{F}M = ? \\ \widehat{M} = ۹۰^\circ \\ \widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲ = ۲۲^\circ \end{cases}$



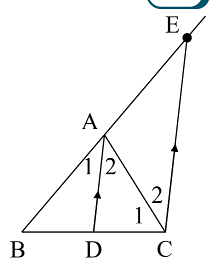

$\overset{\triangle}{BDC} : \widehat{B} + \widehat{C}_۲ + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \to ۶۲^\circ + ۲۲^\circ + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \to \widehat{D} = ۹۶^\circ$

$\overset{\triangle}{MDF}$ : خارجی $\widehat{D} = \widehat{M} + \widehat{F} \to ۹۶^\circ = ۹۰^\circ + \widehat{F} \to \widehat{F} = ۶^\circ$

**۱۵۳**

فرض : $\begin{cases} AD \parallel CE \\ \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \end{cases}$ حکم : $(AC = AE)$ متساوی الساقین است یعنی $\overset{\triangle}{ACE}$

$\left. \begin{matrix} AD \parallel CE \xrightarrow{\text{مورب } AC} \widehat{A}_۲ = \widehat{C}_۲ \\ AD \parallel CE \xrightarrow{\text{مورب } AE} \widehat{A}_۱ = \widehat{E} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{E} = \widehat{C}_۲$

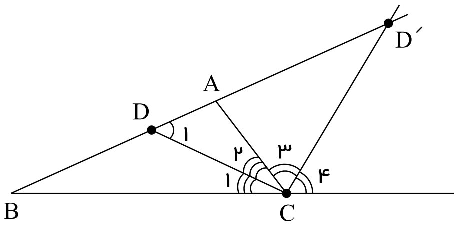



پس مثلث $ACE$ متساوی‌الساقین است یعنی $AC = AE$.

**۱۵۴** مطابق شکل داریم:

$\widehat{C}_۱+\widehat{C}_۲+\widehat{C}_۳+\widehat{C}_۴=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۲\widehat{C}_۱+۲\widehat{C}_۳=۱۸۰^\circ$




$\Rightarrow \widehat{C}_۱+\widehat{C}_۳=۹۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}_۱=\frac{۱}{۲}\widehat{C}_۳} \widehat{C}_۱+۲\widehat{C}_۱=۹۰^\circ \to \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲=۳۰^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C}_۳=\widehat{C}_۴=۶۰^\circ$

$\widehat{C}_۴=۳\widehat{D'} \to ۶۰^\circ=۳\widehat{D'} \to \widehat{D'}=۲۰^\circ$

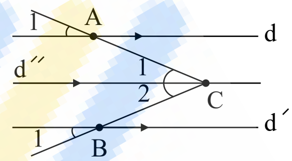
$\overset{\Delta}{CDD'}: \widehat{D}_۱+\widehat{D'}+\widehat{C}_۲+\widehat{C}_۳=۱۸۰^\circ \to \widehat{D}_۱+۲۰^\circ+۳۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \to \widehat{D}_۱=۷۰^\circ$

**۱۵۵** از نقطهٔ $C$ خط $d''$ را موازی دو خط $d$ و $d'$ رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:

$d \parallel d'' \to \widehat{C}_۱=\widehat{A}_۱$

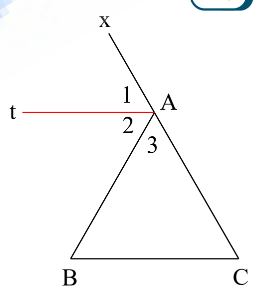
$d' \parallel d'' \to \widehat{C}_۲=\widehat{B}_۱$ جمع

$\widehat{C}_۱+\widehat{C}_۲=\widehat{A}_۱+\widehat{B} \to \widehat{C}=\widehat{A}_۱+\widehat{B}_۱$




**۱۵۶**

فرض : $\begin{cases} AB=AC \\ \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \end{cases}$ حکم : $At \parallel BC$




$\widehat{A}_۳+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{B}=\widehat{C}} \widehat{A}_۳+۲\widehat{B}=۱۸۰^\circ \quad (۱)$

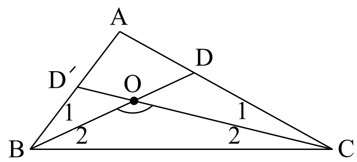
$\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۳=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲} \widehat{A}_۳+۲\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow ۲\widehat{B}=۲\widehat{A}_۲ \to \widehat{B}=\widehat{A}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیهٔ خطوط}} At \parallel BC$

**۱۵۷**

فرض : $\begin{cases} \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲ \\ \widehat{B}_۱=\widehat{B}_۲ \end{cases}$

حکم : $B\widehat{O}C=۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}$



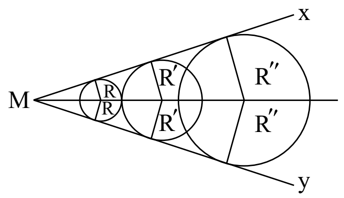

$\overset{\Delta}{ABC}: \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\text{فرض}} \widehat{A}+۲\widehat{B}_۲+۲\widehat{C}_۲=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \dfrac{\widehat{A}}{۲}+\widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۹۰^\circ \quad (۱)$

$\overset{\Delta}{OBC}: \widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲+\widehat{O}=۱۸۰^\circ \to \widehat{B}_۲+\widehat{C}_۲=۱۸۰^\circ-\widehat{O} \quad (۲)$

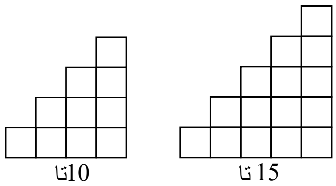
$(۱),(۲) \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{۲}+(۱۸۰^\circ-\widehat{O})=۹۰^\circ \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{۲}+۱۸۰^\circ-۹۰^\circ=\widehat{O} \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{۲}+۹۰^\circ=\widehat{O}$

**۱۵۸** برای بررسی راحت‌تر، روی شکل چند تا از دایره‌ها را رسم می‌کنیم. در هریک از دایره‌ها، شعاع را بر نقاط تماس وارد می‌کنیم.

این شعاع‌ها بر نقاط تماس عمود هستند و ما می‌دانیم نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند روی نیمساز آن زاویه واقع هستند. پس مکان موردنظر نیمساز $x\widehat{M}y$ است.




**۱۵۹** از پایین ردیف اول تا سوم کامل است. اما باید به ردیف چهارم ۱۰ مکعب و به ردیف آخر ۱۵ مکعب و در مجموع ۲۵ مکعب اضافه کنیم تا شکل کامل شود.

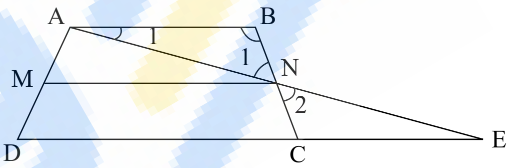



**۱۶۰** الف) ۵۲ عدد

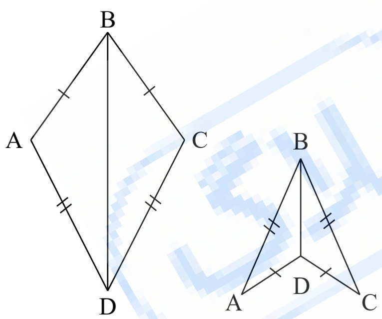
ب) ۳۸ عدد

**۱۶۱** در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق $AD$ را $M$ و وسط ساق $BC$ را $N$ می‌نامیم و از $M$ به $N$ وصل می‌کنیم. حال از $A$ به $N$ وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ $CD$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. دو مثلث $ABN$ و $NCE$ هم‌نهشت هستند. پس $AB=CE$ و $AN=NE$ است و $DE=DC+CE=DC+AB$ . از طرفی، چون $MN||DE$ و نقطه‌های $M$ و $N$ وسط ضلع‌های $AD$ و $AE$ از مثلث $ADE$ هستند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ADE}: \frac{AM}{AD}=\frac{MN}{DE}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}DE=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$$

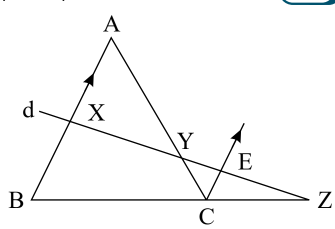



**۱۶۲** خیر، مثال نقض‌هایی را نشان می‌دهیم.




**۱۶۳** شکل‌های (ب) و (ت) چندضلعی هستند و شکل‌های (الف)، (پ) و (ث) چندضلعی نیستند.

**۱۶۴** از $C$ خطی موازی $AB$ رسم می‌کنیم تا $d$ را در $E$ قطع کند.




$$\overset{\Delta}{AXY} \sim \overset{\Delta}{YCE} \rightarrow \frac{CE}{AX}=\frac{CY}{YA}$$

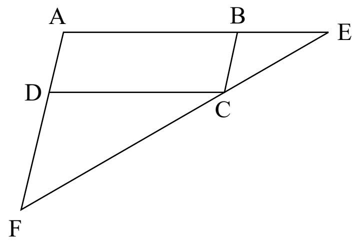
$$\overset{\Delta}{BXZ}: CE||BX \rightarrow \frac{ZC}{BZ}=\frac{CE}{XB} \rightarrow \frac{XB}{CE}=\frac{BZ}{ZC}$$

از ضرب طرفین تساوی‌های بالا داریم:

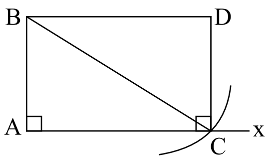
$$\frac{BZ}{ZC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{CE}{AX}\times\frac{XB}{CE} \rightarrow \frac{AX}{XB}\times\frac{BZ}{ZC}\times\frac{CY}{YA}=۱$$

**۱۶۵** با توجه به شکل و قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BC||AF \rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{FC}{EF} \\ DC||AE \rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{EC}{EF} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{FC}{EF}+\frac{EC}{EF}=\frac{FC+EC}{EF}=\frac{EF}{EF}=۱ \rightarrow \frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$$




**۱۶۶** بر روی نیم‌خط $Ax$ از نقطهٔ $A$ عمود $AB$ به طول $۳cm$ خارج می‌کنیم و از نقطهٔ $B$ کمانی به طول $۵cm$ می‌زنیم تا $Ax$ را در نقطهٔ $C$ قطع کند.




سپس از نقطهٔ $C$ عمود $CD = ۳cm$ را خارج می‌کنیم و در انتها نقاط $B$ و $D$ را به‌هم وصل می‌کنیم.

**۱۶۷**

**الف** گزینهٔ «۳»

**ب** گزینهٔ «۳»

**۱۶۸**

**الف** این مکعب از ۱۲۵ مکعب واحد تشکیل شده است.

هیچ‌کدام از آنها دارای چهار وجه رنگی نیستند.

**ب** این مکعب از ۱۲۵ مکعب واحد تشکیل شده است.

گوشه‌های مکعب بزرگ که از هشت مکعب واحد تشکیل شده است دارای سه وجه رنگی هستند.

**پ** این مکعب از ۱۲۵ مکعب واحد تشکیل شده است.

روی هر یال مکعب بزرگ، سه مکعب با دو وجه رنگی داریم، پس در مجموع $۳۶ = ۳ \times ۱۲$ مکب دارای دو وجه رنگی وجود دارد.

**ت** این مکعب از ۱۲۵ مکعب واحد تشکیل شده است.

نه مکعب مرکزی هر سطح دارای یک وجه رنگی هستند که در مجموع $۵۴ = ۶ \times ۹$ مکعب می‌شود.

**ث** این مکعب از ۱۲۵ مکعب واحد تشکیل شده است.

$۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$ مکعب واحد که در مرکز مکعب اصلی هستند رنگ‌آمیزی نشده‌اند. (این مکعب‌ها دیده نمی‌شوند مگر اینکه مکعب‌های واحد از هم جدا شوند.)