نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۴۸۸۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱) نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد.

۲) اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبهٔ n باشند. ثابت کنید:

$$\left|A^{-۱}+B^{-۱}\right| = \frac{|A+B|}{|AB|}$$

۳) اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ اعداد m و n و r را طوری پیدا کنید به طوری‌که داشته باشیم $mA^۲ + nA + rI = \overline{O}$.

۴) اگر A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|}$$

۵) اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $\left|A^۲\right|$ را به‌دست آورید.

۶) ماتریس مربعی A در تساوی $۲A^۲ - A + I = \overline{O}$ صدق می‌کند. ابتدا نشان دهید A وارون‌پذیر است، سپس وارون A را حساب کنید.

۷) اگر A و B مربعی و وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$$

۸) اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB = I$، آنگاه ثابت کنید.

الف) A وارون‌پذیر است.

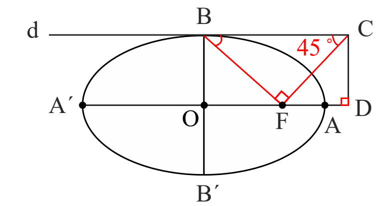
ب) $B = A^{-۱}$

۹) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم $A^۲ = \alpha A + \beta I$.

۱۰) از نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

۱۱) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $d: y = ۳x - ۸$ باشد و بر محورهای مختصات در ناحیهٔ چهارم مماس باشد.

۱۲) در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۱۳) وضعیت دو دایرهٔ $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۴) از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس A را محاسبه کنید.

۱۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱۰۰}$ را به دست آورید؟

۱۶ در مثلث ABC، نقاط M و N به‌ترتیب روی AB و AC قرار دارد. چند نقطه روی محیط مثلث MNB می‌توان یافت که از AB و AC به یک فاصله باشد؟ (M و N روی رأس‌های مثلث قرار ندارند).

۱۷ اگر a, b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید اندازهٔ $a \times b$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. (θ زاویهٔ بین دو بردار a, b است.)

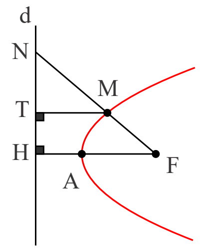
$$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\theta$$

۱۸ مقدار m را طوری بیابید که سه بردار $a = ۲i + (m + ۱)j - ۳k$، $b = ۲j + k$ و $c = -i + j + k$ هم‌صفحه باشند.

۱۹ مقدار m را طوری بیابید که تصویر قائم بردار $a = (m - ۱, ۲, -۱)$ در امتداد بردار b، بردار $a' = (۱, ۳, -۴)$ باشد.

۲۰ به‌ازای هر دو بردار دلخواه u و v نامساوی کوشی - شوارتز را اثبات کنید.

۲۱ در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۲۲ فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ نوشت. ثابت کنید $|A| = ۰$.

۲۳ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

ب در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A| \neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

پ برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $\mathbb{R}^۳$ داریم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

۲۴ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف در ماتریس $A = [a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij} = \frac{۲i}{j - ۱}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با: ....

ب اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ....

پ اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند، حاصل $\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$ برابر است با ....

۲۵ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف در حالت کلی حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

ب اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $|A| = ۲$، آنگاه $|۲A| = ۱۶$ است.

پ مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O, r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارج‌اند، دایرهٔ $C'(O, ۲r)$ است.

ت در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

۲۶ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۲۷ بیضی با طول قطرهای کوچک و بزرگ ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۲۸ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $(x + y + z)$ را بیابید.

۲۹ اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (۱, ۲, ۱)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - ۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۳۰) اگر $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^۳|$ را محاسبه کنید.

۳۱) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰$.

۳۲) اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (۳, ۱, -۱)$ و $r = ۲$ باشد، بردار $r\vec{b} - \vec{a}$ را به دست آورید.

۳۳) در سهمی $۴y^۲ + ۴y - ۲x - ۱ = ۰$، مختصات کانون و رأس و معادلهٔ خط هادی را بیابید.

۳۴) نقطهٔ $S = (۲, ۱)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + ۱$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادلهٔ سهمی را بنویسید.

۳۵) طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ $A(۱, ۱)$ در دایرهٔ $x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y = ۴$ را حساب کنید.

۳۶) دایرهٔ C به مرکز $O(-۱, ۱)$ و شعاع ۲، از چند ناحیهٔ مختصات می‌گذرد؟

۳۷) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۸y - ۴ = ۰$ را به دست آورید.

۳۸) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x = y + ۲$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور xها مماس باشد.

۳۹) نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کنید:

$$x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y - ۳ = ۰$$

۴۰) معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۲, ۳)$ و خط $x = ۴$ هادی آن باشد.

۴۱) برداری عمود بر دو بردار $b = (-۲, ۱, -۵)$ و $a = (۱, -۳, ۲)$ پیدا کنید.

۴۲) اگر $|a| = ۳$ و $|b| = ۴$ و اندازهٔ تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b برابر ۲ باشد، مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار $۲a + ۳b$ و $b - ۲a$ را به دست آورید.

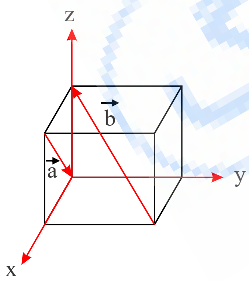
۴۳) کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر بردار a یک ضلع متوازی‌الاضلاع و بردار d یک قطر آن باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |a \times d|$

ب) اگر d و d' قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |d \times d'|$

۴۴) اگر زاویهٔ دو بردار u و v با محور xها به‌ترتیب $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ بوده و $|u| = \sqrt{۲}$ و $|v| = ۲$ باشند، اندازهٔ تصویر قائم بردار $u + v$ روی محور xها را به دست آورید.

۴۵) در مکعب مقابل زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.



۴۶) سه بردار c, b, a به طول یک واحد مفروض‌اند. در صورتی که $۲a + ۳b + ۴c = \vec{۰}$ اندازهٔ بردار $۳a + ۴b$ را به دست آورید.

۴۷) برای دو بردار غیر صفر a و b رابطهٔ $|۲a - b| = |a + b|$ برقرار است. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $(۲b - a) \perp a$ ب) $|a| = ۲|b|$

۴۸) بردار غیرصفر $V = (|a|, a, a - |a|)$ مفروض است. درستی و نادرستی هریک از عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر V بر محور zها عمود باشد، زاویهٔ آن با محور oy حاده است.

ب) اگر V با محور zها زاویهٔ منفرجه بسازد، زاویهٔ آن با محور oy حاده است..

پ) اگر V با محور yها زاویهٔ حاده بسازد، زاویهٔ آن با ox حاده و عمود بر محور zهاست.

۴۹) فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a| = ۲$ و $|b| = \sqrt{۲}$ باشد. اگر $|۲a + b|^۲ = ۱۲a \cdot b$، اندازهٔ تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به دست آورید.

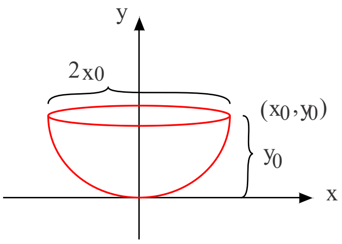
۵۰) فرض کنید $A(۲,-۱,۱)$، $B(۳,۲,-۱)$ و M نقطه‌ای در فضا باشد به‌طوری که $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{۷}{۲}$ فاصلهٔ نقطهٔ M تا وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

۵۱) مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را به دست آورید. $(a\neq ۰)$

۵۲) ثابت کنید خط $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ بر سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y+x+۱=۰$ مماس است و مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

۵۳) مختصات کانون و همچنین معادلهٔ سهمی را به رأس $A(۴,۶)$ و خط هادی $x=۹$ بنویسید.

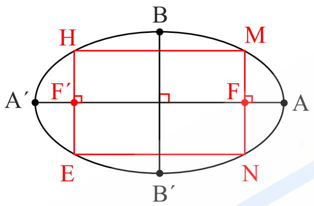
۵۴) یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آن به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم‌شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۵۵) ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آنگاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $۲a$ است.

۵۶) ثابت کنید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو دایرهٔ متداخل $C_۱(O_۱,R_۱)$ و $C_۲(O_۲,R_۲)$ مماس‌اند، یک بیضی می‌باشد.

۵۷) در شکل مقابل طول قطر بزرگ برابر ۴۰ و طول قطر کوچک برابر ۲۴ می‌باشد. محیط و مساحت مستطیل $MNEH$ را به دست آورید.



۵۸) ثابت کنید در هر بیضی طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $MN=\frac{۲b^۲}{a}$

۵۹) وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

الف) $x^۲+y^۲-۲x=۱\ ,\ x^۲+y^۲=۱$

ب) $x^۲+y^۲=۴\ ,\ x^۲+y^۲-۸x-۴y+۱۹=۰$

۶۰) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چیست؟

۶۱) ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۶۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۶۳) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶۴) فرض کنید $A(-۳,۶,۲)$، $B(۲,۱,۲)$ و C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. اگر $|BC|=۴|AC|$، مختصات نقطهٔ C را به دست آورید.

۶۵) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، اگر $\overrightarrow{BA}=۳\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ و $\overrightarrow{BD}=۲\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ باشد، طول قطر AC را به دست آورید.

۶۶) دو بردار $a=(۰,۰,-۴)$ و $b=(-۲,۱,۲)$ در فضا مفروض‌اند. برداری به طول $۴\sqrt{۶}$ را به دست آورید که در خلاف راستای نیمساز داخلی زاویهٔ بین دو بردار a و b باشد.

۶۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه ی $A^{۱۰}$.

۶۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس .... می‌نامیم.

ب حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۶۹ بردارهای $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ را در نظر بگیرید.

الف تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

ب برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

۷۰ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را .... می‌نامیم.

ب اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با ....

پ اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$، در این صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۷۱ مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به وجود می‌آید.

۷۲ نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌یک روی خط $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۷۳ اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درآیه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & ,i<j \\ ۲ & ,i=j \\ i+j & ,i>j \end{cases}$ باشد، درآیه‌های $a_{۱۲}, a_{۳۱}, a_{۳۳}$ را به‌دست آورید.

۷۴ اگر $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix} + ۲A-I$ و مجموعه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با ۵ باشد، مقدار m را بیابید.

۷۵ درون مثلث ABC، چند نقطه وجود دارد که از ضلع BC به فاصلهٔ L و از AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟ در صفحهٔ مثلث چطور؟

۷۶ خط مورب L، دو خط موازی d و d' را در نقاط A و B قطع می‌کند. مکان هندسی محل برخورد نیمساز زوایای A و B را با جابه‌جایی خط L بیابید.

۷۷ مربع $ABCD$ به طول ضلع a مفروض است. مکان هندسی نقاطی درون مربع را بیابید که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع بین $\frac{a}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ باشد.

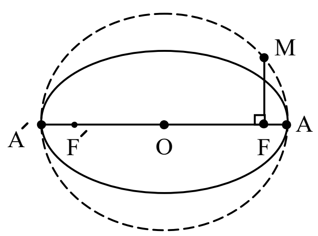
۷۸ به‌ازای چه مقادیری از k و m دستگاه مقابل بی‌شمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} -۲x+ky=۲ \\ ۴x-۶y=m \end{cases}$$

۷۹ الف) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x^۲-۴y+۸x=۰$ را به دست آورید.

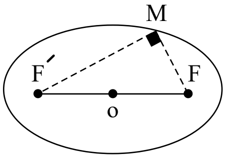
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۸۰ قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۸۱ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' در رأس M قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)

طبق فرض داریم: $2a = 10 \to a = 5$ و $2b = 6 \to b = 3$



۸۲ وضعیت خط $3x + y = 0$ را نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ مشخص کنید.

۸۳ بردارهای $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (-2, 0, 2)$ مفروض‌اند:

الف تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را محاسبه کنید.

۸۴ دو بردار $\vec{a} = (3, -2, 1)$، $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ (شمارهٔ ناحیه ذکر شود.)

ب طول بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ را حساب کنید.

پ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۸۵ درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف حاصلضرب ماتریس 3×1 در ماتریس 1×3، یک عدد است.

ب اگر $A \times B = \overline{O}$ باشد، آنگاه $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$.

۸۶ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف ماتریس قطری ماتریسی است که ....

ب ماتریس اسکالر، ماتریسی است که ....

۸۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس شود، زاویهٔ MF و MF' با خط d برابرند. (F و F' کانون‌ها هستند.)

ب در سهمی با کانون F و خط هادی d، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است.

۸۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف مجموع طول‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کمتر نیست.

ب خط $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ با محور zها موازی است.

۸۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف برای بردارهای غیر صفر a و b و c، اگر $a \times b = a \times c$ آنگاه داریم: $b = c$

ب برای بردارهای غیر صفر a و b و c، اگر $a \cdot b = a \cdot c$ آنگاه داریم: $b = c$

۹۰ دو بردار $\vec{a} = (1, 2, -1)$ و $\vec{b} = (0, 2, -1)$ را در نظر بگیرید.

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ (شمارهٔ ناحیه ذکر شود.)

ب طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخنامه تشریحی

۱ معادلهٔ خطی که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y-b=\frac{b-d}{a-c}(x-a)\rightarrow y=(\frac{b-d}{a-c})x-(\frac{ab-ad}{a-c})+b$$

$$\rightarrow y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix}=۰\rightarrow (bx+yc+ad)-(ay+dx+bc)=۰$$

$$(b-d)x+(c-a)y+(ad-bc)=۰$$

$$(c-a)y=(d-b)x+(bc-ad)$$

$$y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

۲

$$\frac{|A+B|}{|AB|}=\frac{|A+B|}{|A|\,|B|}=\frac{۱}{|A|}\frac{|A+B|}{|B|}$$

$$=\left|A^{-۱}\right||A+B|\left|B^{-۱}\right|=\left|A^{-۱}(A+B)B^{-۱}\right|=\left|(I+A^{-۱}B)B^{-۱}\right|=\left|B^{-۱}+A^{-۱}\right|$$

۳

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۱ & ۱۸ \\ ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$mA^{۲}+nA+rI=\overline{O}\rightarrow\begin{bmatrix} ۳۱m & ۱۸m \\ ۱۲m & ۷m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵n & ۳n \\ ۲n & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & r \end{bmatrix}=\overline{O}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} ۳۱m+۵n+r & ۱۸m+۳n \\ ۱۲m+۲n & ۷m+n+r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ۱۸m+۳n=۰ \\ ۱۲m+۲n=۰ \end{matrix}\right\}\rightarrow ۶m+n=۰\Rightarrow n=-۶m$$

با جایگذاری $n=-۶m$ در درایه‌های دیگر نتیجه می‌گیریم $r=-m$؛ پس با فرض $m=۱$ مقادیر $n=-۶$ و $r=-۱$ به دست می‌آیند.

۴

$$A^{-۱}A=I\xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم.}}\left|A^{-۱}A\right|=|I|$$

$$\rightarrow\left|A^{-۱}\right||A|=۱\rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۵ می‌دانیم $|A^{n}|=|A|^{n}$ بنابراین داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{vmatrix}=-۲\begin{vmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{vmatrix}=-۳۰$$

$$\rightarrow\left|A^{۲}\right|=|A|^{۲}=(-۳۰)^{۲}=۹۰۰$$

۶

$$-۲A^{۲}+A=I\rightarrow A(-۲A+I)=I\rightarrow |A|\,|I-۲A|=|I|$$

$\rightarrow |A|\,|I-۲A|=۱\rightarrow |A|\neq ۰\rightarrow$ A وارون‌پذیر است.

$$A(I-۲A)=I\rightarrow A^{-۱}=I-۲A$$

۷ طبق تعریف وارون باید ضرب AB و $B^{-۱}A^{-۱}$ برابر I باشد.

$$(AB)(B^{-۱}A^{-۱})=A(\underbrace{BB^{-۱}}_{I})A^{-۱}=AIA^{-۱}=AA^{-۱}=I$$

$$(B^{-۱}A^{-۱})(AB)=B^{-۱}(\underbrace{A^{-۱}A}_{I})B=B^{-۱}IB=B^{-۱}B=I$$

۸

الف)

پس A وارون‌پذیر است. $AB = I \to |AB| = |I| \to |A|\,|B| = ۱ \to |A| \neq ۰ \Rightarrow$

ب)

$$AB = I \xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-۱}} A^{-۱}(AB) = A^{-۱}I$$

$$\to (A^{-۱}A)B = A^{-۱} \to IB = A^{-۱} \to B = A^{-۱}$$

۹

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha & ۲\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix}, \ \beta I = \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} = \alpha A + \beta I \to \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & ۲\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \to \begin{cases} \alpha = ۵ \\ \beta = ۲ \end{cases}$$

۱۰

$$(x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۵$$

$$O(۱,۱),\ A(۲,۳) \to m_{OA} = \frac{y_A - y_o}{x_A - x_o} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲ \xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m' = -\frac{۱}{۲} \to y - ۳ = -\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

۱۱ اگر دایره‌ای در ناحیهٔ چهارم بر محورها مماس باشد، مرکز آن به‌صورت $O(R,-R)$ می‌باشد که R شعاع دایره است. داریم:

$$O \in d \Rightarrow -R = ۳R - ۸ \Rightarrow R = ۲ \text{ و } O(۲,-۲)$$

معادلهٔ دایره: $(x-۲)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۴$

۱۲

$$\left.\begin{aligned} \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ \to BF = FC \\ BF = a \end{aligned}\right\} \to BF = FC = a$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{BFC}: a^{۲} + a^{۲} = BC^{۲} \to BC = a\sqrt{۲} \\ OD = BC \end{aligned}\right\} \to BC = OD = a\sqrt{۲}$$

$$AD = OD - OA = a\sqrt{۲} - a = a(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$C\hat{F}D = F\hat{C}D = ۴۵^\circ \to DF = DC$$

$$\overset{\triangle}{FDC}: DF^{۲} + DC^{۲} = a^{۲} \to DF^{۲} = \frac{a^{۲}}{۲} \to DF = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$AF = FD - AD = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a - (a\sqrt{۲} - a) = a(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۲} + ۱) = a(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{a(\sqrt{۲}-۱)}{a(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

۱۳ مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-۱)^{۲} + y^{۲} = ۱$ برابر است با: $O = (۱,۰), r = ۱$

و مرکز و شعاع دایرهٔ $x^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۱$ برابر $O' = (۰,۱), r' = ۱$

فاصلهٔ دو مرکز برابر $OO' = \sqrt{۲}$ است و $r + r' = ۲$ و $r - r' = ۰$ پس:

$|r - r'| < OO' < r + r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

۱۴

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{B^{-۱}B}_{I}A\underbrace{CC^{-۱}}_{I} = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}C^{-۱} \Rightarrow A = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}C^{-۱}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = ۴ - ۳ = ۱$$

$$\Rightarrow B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = ۹ - ۱۰ = -۱$$

$$\Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\times\begin{bmatrix}-۳&-۲\\-۵&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۲\\۵&۳\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&-۱\end{bmatrix}C^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۲\\۵&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۱&۱۹\\-۴۹&-۳۰\end{bmatrix}$$

۱۵

$$A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۲\\۲&۰\end{bmatrix}$$

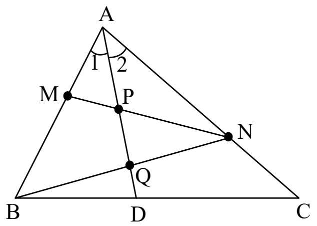
$$A^{۴}=\begin{bmatrix}۰&-۲\\۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۲\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴&۰\\۰&-۴\end{bmatrix}=-۴I$$

$$A^{۱۰۰}=(A^{۴})^{۲۵}=(-۴I)^{۲۵}=-(۴^{۲۵})\times I^{۲۵}=-(۲^{۵۰})I$$

۱۶

مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد.

محل برخورد نیمساز AD با MN و BN پاسخ مسئله می‌باشد. (نقاط P و Q)



۱۷

$$\text{فرض: }\begin{cases}a=(a_۱,a_۲,a_۳)\\ b=(b_۱,b_۲,b_۳)\end{cases}\xrightarrow{\times} a\times b=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

$$\xrightarrow{\text{توان دوم اندازه}}|a\times b|^{۲}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)^{۲}+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)^{۲}+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)^{۲}$$

$$=a_۲^۲b_۳^۲+a_۳^۲b_۲^۲-۲a_۲a_۳b_۲b_۳+a_۳^۲b_۱^۲+a_۱^۲b_۳^۲-۲a_۱a_۳b_۱b_۳+a_۱^۲b_۲^۲+a_۲^۲b_۱^۲-۲a_۱a_۲b_۱b_۲$$

$$=(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)-\underbrace{(a_۱^۲b_۱^۲+a_۲^۲b_۲^۲+a_۳^۲b_۳^۲+۲a_۲a_۳b_۲b_۳+۲a_۱a_۳b_۱b_۳+۲a_۱a_۲b_۱b_۲)}_{(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲=(a\cdot b)^۲}$$

$$=|a|^۲|b|^۲-(a\cdot b)^۲=|a|^۲|b|^۲-|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta$$

$$=|a|^۲|b|^۲(۱-\cos^۲\theta)=|a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta=(|a|\,|b|\sin\theta)^۲\xrightarrow{\text{جذر}}|a\times b|=|a|\,|b|\sin\theta$$

۱۸

حل دترمینان ۳ × ۳ به روش ساروس:

$V=۰$ (حجم) ⇐ سه بردار هم‌صفحه‌اند.

$$V=|a\cdot(b\times c)|=۰\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}2&m+1&-3\\0&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}2&m+1\\0&2\\-1&1\end{matrix}\right|=۰$$

$$|(۴-m-۱+۰)-(۶+۲+۰)|=۰\Rightarrow m=-۵$$

۱۹ اگر $a'=(۱,۳,-۴)$ تصویر قائم بردار $a=(m-۱,۲,-۱)$ در امتداد بردار b باشد، می‌دانیم:

$$a\cdot a'=|a'|^۲$$

زیرا:

$$\begin{cases}a\cdot a'=a\cdot\dfrac{a\cdot b}{|b|^۲}b=\dfrac{(a\cdot b)}{|b|^۲}(a\cdot b)=\dfrac{(a\cdot b)^۲}{|b|^۲}=|a'|^۲\\ a'=\dfrac{a\cdot b}{|b|^۲}b\Rightarrow|a'|=\dfrac{|a\cdot b|}{|b|^۲}|b|=\dfrac{|a\cdot b|}{|b|}\end{cases}$$

$$a\cdot a'=|a'|^۲\Rightarrow m-۱+۶+۴=۱+۹+۱۶\Rightarrow m=۱۷$$

۲۰ نامساوی کوشی- شوارتز:

$$|u\cdot v|\le|u|\,|v|$$

طبق تعریف ضرب داخلی داریم:

$$u\cdot v=|u|\,|v|\cos\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{اندازه}}|u\cdot v|=||u|\,|v|\cos\theta|=|u|\,|v|\,|\cos\theta|\\ -۱\le\cos\theta\le۱\Rightarrow|\cos\theta|\le۱\end{array}\right\}\Rightarrow|u\cdot v|\le|u|\,|v|$$

(۲۱) فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT = MF \quad , \quad FA = AH$$

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \to \dfrac{MT}{FH} = \dfrac{NT}{NH} \to \dfrac{MT}{۲FA} = \dfrac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \to \dfrac{MF}{FN} = \dfrac{TH}{HN} \to \dfrac{MT}{FN} = \dfrac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \dfrac{\dfrac{\cancel{MT}}{۲FA}}{\dfrac{\cancel{MT}}{FN}} = \dfrac{\dfrac{NT}{\cancel{NH}}}{\dfrac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\to \frac{FN}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \to \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

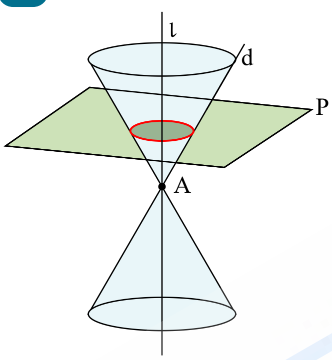
(۲۲) فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \left| \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix} \right| \left| \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \right| = ۰ \times ۰ = ۰$$

(۲۳)

الف درست



ب نادرست

پ درست

(۲۴)

الف

$$a_{ij} = \frac{۲i}{j - ۱} \Rightarrow a_{۳۲} = \frac{۲ \times ۳}{۲ - ۱} = ۶$$

ب

$$|-A| = (-۱)^۳|A| = -۸$$

$$\text{توجه} : A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۸$$

پ

$$\vec{k} \cdot (\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}}) = |\vec{k}|^۲ = ۱$$

(۲۵)

الف نادرست

در حالت کلی ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد. برای مثال $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \neq BA$$

ب

$|۲A| = (۲)^{۳}|A| \xlongequal{|A|=۲} ۸ \times ۲ = ۱۶$ درست

می‌دانیم: اگرماتریس A به‌صورت $n \times n$ باشد، داریم:

$|kA| = k^{n}|A|$

پ درست

ت نادرست

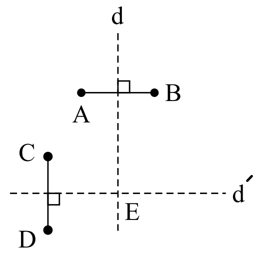
۲۶ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم.

بنابراین نقطهٔ برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطهٔ E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



۲۷ با توجه به تعریف بیضی داریم:

قطر بزرگ: $۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

قطر کوچک: $۲b = ۶ \rightarrow b = ۳$

می‌دانیم:

$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow (۵)^{۲} = (۳)^{۲} + c^{۲} \Rightarrow c = ۴$

خروج از مرکز: $\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$

۲۸

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} \\ ۲x + y = ۵ \rightarrow y = ۲ \rightarrow x + y + z = \frac{۳}{۲} \\ z = -۲ \end{cases}$$

۲۹

$\vec{a} - ۲\vec{b} = (۲, ۰, -۱) - (۲, ۴, ۲) = (۰, -۴, -۳)$, $|\vec{a} - ۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$

۳۰ دترمینان ماتریس A را با بسط نسبت به ستون اول محاسبه می‌کنیم:

$|A| = ۲(۴ - ۳) = ۲ \rightarrow |A^{۳}| = |A|^{۳} = ۸$

۳۱

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۰ \xrightarrow[|\vec{b}|\neq ۰]{|\vec{a}|\neq ۰} \cos\theta = ۰ \xrightarrow{o \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}} \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۳۲

$\vec{a} = (۲, ۲, -۱) \rightarrow r\vec{b} - \vec{a} \xlongequal{r=۲} ۲\vec{b} - \vec{a} = (۶, ۲, -۲) - (۲, ۲, -۱) = (۴, ۰, -۱)$

۳۳

$$۴y^{۲} + ۴y = ۲x + ۱ \Rightarrow y^{۲} + y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}$$

$$(y + \frac{۱}{۲})^{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴} \Rightarrow (y + \frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(x + ۱)$$

$$\begin{cases} \text{رأس سهمی}: S(-۱, -\frac{۱}{۲}) \text{ و } ۴a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۸} \\ \text{سهمی افقی و دهانهٔ رو به راست} \end{cases}$$

$F(-۱+\frac{۱}{۸},-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۷}{۸},-\frac{۱}{۲})$:کانون سهمی

$x=-۱-\frac{۱}{۸}=-\frac{۹}{۸}$:معادلهٔ خط هادی

۳۴ سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است . پس کانون آن $F(\alpha,۱)$ می‌باشد، داریم:

$$F\in(y=-x+۱)\Rightarrow ۱=-\alpha+۱\Rightarrow \alpha=۰\Rightarrow F(۰,۱)$$

می‌دانیم که $SF=a$. داریم:

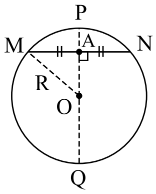
$$SF=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۱)^۲}=۲\Rightarrow a=۲$$

همچنین از مختصات S و F می‌یابیم که دهانهٔ سهمی به‌سمت چپ باز می‌شود. داریم:

$(y-۱)^۲=-۴(۲)(x-۲)\Rightarrow (y-۱)^۲=-۸(x-۲)$:معادلهٔ سهمی

۳۵ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد (وتر MN).

مطابق شکل داریم:



$$x^۲-۴x+y^۲-۲y=۴\Rightarrow (x-۲)^۲-۴+(y-۱)^۲-۱=۴$$

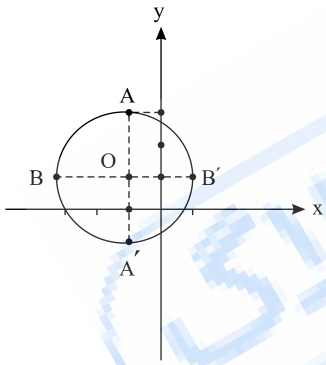
$$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹\Rightarrow O(۲,۱) \text{ و } R=۳$$

$$\overset{\Delta}{AMO}: R^۲=OA^۲+MA^۲\Rightarrow ۹=۱+MA^۲\Rightarrow MA=۲\sqrt{۲}\Rightarrow MN=۲AM=۴\sqrt{۲}$$

۳۶

$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$:معادلهٔ دایره

نمودار این دایره به‌صورت زیر است؛ مطابق شکل از ۴ ناحیه مختصات دایره می‌گذرد.



۳۷

$$x^۲-۴x-۸y-۴=۰\rightarrow (x^۲-۴x)=۸y+۴\Rightarrow (x-۲)^۲-۴=۸y+۴$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲=۸y+۸\Rightarrow (x-۲)^۲=۸(y+۱)$$

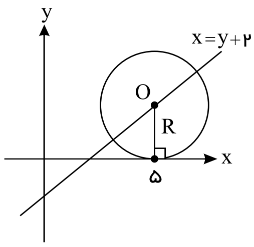
$S=(h,k)=(۲,-۱)$ و $۴a=۸\Rightarrow a=۲$:رأس سهمی

$F(h,a+k)=(۲,-۱+۲)=(۲,۱)$:کانون سهمی قائم

$y=k-a=-۱-۲=-۳$:خط هادی

۳۸ از آنجا که مرکز دایره روی خط $x=y+۲$ می‌باشد. پس می‌توان مختصات O را به‌صورت $(\alpha+۲,\alpha)$ نشان داد. چون طول نقطهٔ O برابر با ۵ می‌باشد.

شکل زیر را در نظر می‌گیریم، پس داریم:



$$\alpha+۲=۵\Rightarrow \alpha=۳\Rightarrow O(۵,۳)\Rightarrow R=۳$$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

$$\text{معادلهٔ دایره}: (x-۵)^۲+(y-۳)^۲=۹$$

۳۹

$$(x^۲-۶x)+(y^۲+۴y)-۳=۰$$

$$(x-۳)^۲-۹+(y+۲)^۲-۴-۳=۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$$

پس این مقطع مخروطی، دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $O(۳,-۲)$ می‌باشد.

۴۰

$$\begin{cases} \text{خط هادی}: x=۴ \\ \text{کانون}: F(۲,۳) \end{cases}$$

می‌دانیم که فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با $۲a$ می‌باشد. داریم:

$$\text{فاصلهٔ } F(۲,۳) \text{ تا } (x-۴=۰) = ۲ \Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$$

سهمی افقی است چون هادی آن $x=۴$ می‌باشد و دهانهٔ آن به‌سمت چپ باز می‌شود.

$$\text{رأس سهمی}: S(۲+۱,۳)=(۳,۳)$$
$$\text{معادلهٔ سهمی}: -۴\times ۱(x-۳)=(y-۳)^۲ \Rightarrow (y-۳)^۲=-۴(x-۳)$$

۴۱ بردار عمود بر دو بردار a و b، برداری است که از ضرب خارجی آن دو به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a=(۱,-۳,۲)\times \\ b=(-۲,۱,-۵) \end{cases}$$
$$a\times b=(۱۵-۲,-۴+۵,۱-۶)=(۱۳,۱,-۵)$$

و نیز هر مضربی از این بردار بر a و b عمود است.

۴۲

$$|a|=۳ \quad , \quad |b|=۴ \quad , \quad |a'|=۲$$

مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار $(۲a+۳b)$ و $(b-۲a)$ برابر است با نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن دو یعنی:

$$S=\frac{۱}{۲}|(۲a+۳b)\times(b-۲a)|=\frac{۱}{۲}\left|۲a\times b-۴\underbrace{a\times a}_{۰}+۳\underbrace{b\times b}_{۰}\underbrace{-۶b\times a}_{+۶a\times b}\right|=\frac{۱}{۲}|۸a\times b|$$

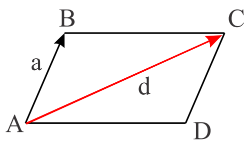
$$\Rightarrow S=۴\,|a\times b|=?$$

$$\begin{cases} \text{طبق فرض}: |a'|=۲ \Rightarrow \dfrac{|a\cdot b|}{|b|}=۲ \xrightarrow{|b|=۴} |a\cdot b|=۸ \\ \text{می‌دانیم}: |a\times b|^۲+|a\cdot b|^۲=|a|^۲|b|^۲ \Rightarrow |a\times b|^۲+۶۴=۹\times ۱۶ \Rightarrow |a\times b|^۲=۸۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow |a\times b|=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵} \Rightarrow S=۴\,|a\times b|=۴\times ۴\sqrt{۵}=۱۶\sqrt{۵}$$

اثبات رابطهٔ $|a\times b|^۲+|a\cdot b|^۲=|a|^۲|b|^۲$:

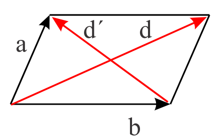
$$|a\times b|^۲+|a\cdot b|^۲=|a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta+|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta=|a|^۲|b|^۲\underbrace{(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)}_{۱}=|a|^۲|b|^۲$$

۴۳ الف) درست. زیرا:



$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=۲S_{ABC}=۲\times\frac{۱}{۲}|a\times d|=|a\times d|$$

ب) نادرست. زیرا:



$$\begin{cases} |d\times d'|=|(a+b)\times(a-b)|=\left|\underbrace{a\times a}_{۰}-a\times b+\underbrace{b\times a}_{-a\times b}-\underbrace{b\times b}_{۰}\right|=|-۲a\times b|=۲\,|a\times b|=۲S \\ d=a+b \\ d'=a-b \end{cases}$$

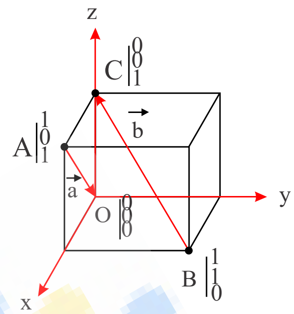
$$\Rightarrow |d\times d'|=۲S \rightarrow S=\frac{۱}{۲}|d\times d'|$$

۴۴ اگر α و α' به‌ترتیب زاویهٔ بردار u و v با محور xها باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{۳\pi}{۴}, |u| = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{|u|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۱ \\ \alpha' = \frac{\pi}{۳}, |v| = ۲ \Rightarrow \cos\alpha' = \frac{a'}{|v|} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{a'}{۲} \Rightarrow a' = ۱ \\ u = (a,b,c),\ v = (a',b',c'),\ u+v = (\underbrace{a+a'}_{۰}, b+b', c+c') \end{cases}$$

بردار $u+v$ برمحور xها عمود است و هیچ تصویر قائمی ندارد.

۴۵ فرض می‌کنیم یال مکعب به طول یک واحد باشد.



$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{AO} = O - A = (-۱, ۰, -۱) \\ \vec{b} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-۱, -۱, ۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{۱ + ۰ - ۱}{|a|\,|b|} = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۴۶

$|a| = |b| = |c| = ۱$ و $|۳a + ۴b| = ?$

$$۲a + ۳b + ۴c = \vec{۰} \Rightarrow ۲a + ۳b = -۴c \xrightarrow{\text{اندازه}} |۲a + ۳b| = |-۴c|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴|a|^۲ + ۹|b|^۲ + ۱۲a \cdot b = ۱۶|c|^۲ \Rightarrow ۱۳ + ۱۲a \cdot b = ۱۶ \Rightarrow a \cdot b = \frac{۱}{۴}$$

$$|۳a + ۴b|^۲ = ۹|a|^۲ + ۱۶|b|^۲ + ۲۴a \cdot b = ۹ + ۱۶ + ۲۴ \times \frac{۱}{۴} = ۳۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |۳a + ۴b| = \sqrt{۳۱}$$

۴۷ الف) یادآوری:

$$|a| = |b| \Rightarrow (a+b) \perp (a-b)$$

فرض: $|۲a - b| = |a + b| \Rightarrow ((۲a - b) + (a + b)) \perp ((۲a - b) - (a + b))$

$\Rightarrow ۳a \perp (a - ۲b)$ یا $a \perp (۲b - a) \Rightarrow$ درست

ب) نادرست. زیرا طبق (الف) داریم:

$$(۲b - a) \perp a \Rightarrow (۲b - a) \cdot a = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a \cdot b - |a|^۲ = ۰ \Rightarrow ۲\,|a|\,|b| \cos\theta = |a|^۲ \Rightarrow ۲\,|b| \cos\theta = |a|$$

۴۸ الف) درست

$$V \perp oz \Rightarrow z = ۰ \Rightarrow a - |a| = ۰ \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a > ۰ \Rightarrow V = (+, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{زاویهٔ } V \text{ با محور } oy \text{ حاده است.}}}{+}, ۰)$$

ب) نادرست

$$a - |a| < ۰ \Rightarrow a < |a| \Rightarrow a < ۰ \Rightarrow V = (+, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{زاویهٔ } V \text{ با محور } oy \text{ منفرجه است.}}}{-}, -)$$

پ) درست

$$a > ۰ \Rightarrow V = (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{زاویه با } ox \text{ حاده}}}{+}, +, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{بر محور } z\text{ها عمود}}}{۰})$$

۴۹

$|a| = ۲\ ,\ |b| = \sqrt{۲}\ ,\ |a'| = ?$

$$|۲a + b|^۲ = ۱۲a \cdot b \Rightarrow ۴|a|^۲ + |b|^۲ + ۴a \cdot b = ۱۲a \cdot b \Rightarrow ۱۶ + ۲ = ۸a \cdot b$$

$$\Rightarrow a \cdot b = \frac{۹}{۴} \Rightarrow |a|\,\underbrace{|b|}_{\sqrt{۲}}\,\cos\theta = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \underbrace{|a| \cos\theta}_{|a'|} = \frac{۹}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$$

۵۰

$A(2,-1,1), B(3,2,-1), M(x,y,z)$

$\overrightarrow{AM} = M - A = (x-2, y+1, z-1), \overrightarrow{BM} = M - B = (x-3, y-2, z+1)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{7}{2} \Rightarrow (x-2, y+1, z-1) \cdot (x-3, y-2, z+1) = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 + y^2 - y - 2 + z^2 - 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow x^2 - 5x + y^2 - y + z^2 = \frac{1}{2} \quad (1)$

B, A وسط $N = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0) \Rightarrow |MN| = \sqrt{(x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + z^2}$

$\Rightarrow |MN| = \sqrt{\underbrace{x^2 - 5x + y^2 - y + z^2}_{\text{طبق (1)}\ \frac{1}{2}} + \frac{26}{4}} = \sqrt{7}$

۵۱

$y = ax^2 + bx + c \to ax^2 + bx = y - c \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y}{a} - \frac{c}{a}$

$\xrightarrow{+(\frac{b}{2a})^2} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\to (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2}{4a} - c) \to (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a})$

سهمی قائم است.

مختصات رأس $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

$4m = \left|\frac{1}{a}\right| \to m = \frac{1}{4|a|}$

الف) اگر $a > 0$ باشد دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است و مختصات کانون آن برابر است با:

$F(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}) = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$

ب) اگر $a < 0$ باشد دهانهٔ سهمی رو به پایین است و مختصات کانون آن برابر است با:

$F(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{-4a}) = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$

بنابراین در هر حالت مختصات کانون سهمی $F(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$ می‌باشد.

۵۲ خط بر سهمی مماس است بنابراین باید معادلهٔ حاصل از حل دستگاه آنها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(-2)} -2y = x - 3 \to x = -2y + 3 \quad (1)$

$y^2 - 2y + x + 1 = 0 \xrightarrow{(1)} y^2 - 2y - 2y + 3 + 1 = 0 \to y^2 - 4y + 4 = 0 \to (y-2)^2 = 0 \to y = 2$

$y = 2$ ریشهٔ مضاعف است پس این خط بر سهمی مماس است.

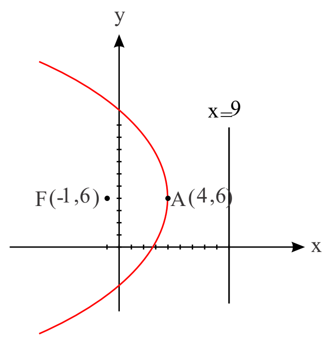
$x = -2y + 3 \xrightarrow{y=2} x = -2 \times 2 + 3 = -1 \to$ مختصات نقطهٔ تماس $(-1, 2)$

۵۳ با توجه به جایگاه رأس و خط هادی در دستگاه مختصات داریم: $a = 9 - 4 = 5$

مختصات کانون به‌صورت زیر است:

$x_F = x_A - a = 4 - 5 = -1 \quad , \quad y_F = y_A = 6$

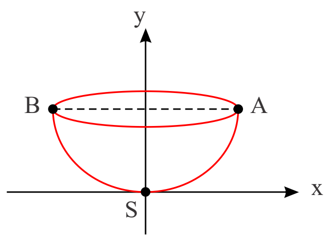
$\Rightarrow F(-1, 6)$



دهانهٔ سهمی رو به چپ است و معادلهٔ آن $(y-k)^۲=-۴a(x-h)$ می‌باشد و داریم:

$$(y-۶)^۲=-۲۰(x-۴)$$

۵۴ رأس سهمی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. اگر قطر دهانهٔ دیش برابر $۲x_۰$ و گودی (عمق) دیش برابر $y_۰$ باشد مختصات نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ در معادلهٔ $x^۲=۴ay$ صدق می‌کند.

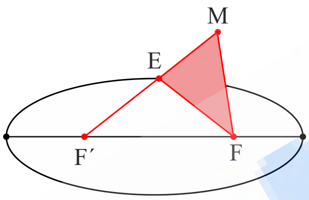


$$\left.\begin{array}{l} x_۰^۲=۴ay_۰ \to a=\dfrac{x_۰^۲}{۴y_۰} \\ x_۰=\dfrac{AB}{۲} \end{array}\right\} \to a=\dfrac{(\frac{AB}{۲})^۲}{۴y_۰}$$

$$\to a=\dfrac{AB^۲}{۱۶y_۰}$$

۵۵

بنابر قضیه حمار در مثلث EMF داریم:



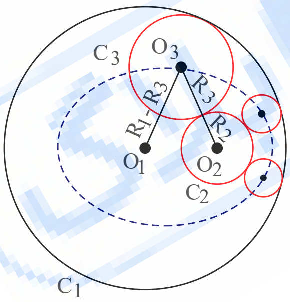
$$ME+MF>EF \xrightarrow{+EF'} (ME+EF')+MF>EF+EF'$$

$$\xrightarrow{EF+EF'=۲a} MF'+ME>۲a$$

۵۶

مطابق شکل، دایرهٔ $C_۳$ بر دو دایرهٔ متداخل $C_۱$, $C_۲$ مماس است.

دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۳$ مماس داخل هستند بنابراین طول خط‌المرکزین آنها برابر است با:



$$O_۱O_۳=R_۱-R_۳$$

دو دایرهٔ $C_۲$ و $C_۳$ مماس خارج هستند بنابراین طول خط‌المرکزین آنها برابر است با:

$$O_۲O_۳=R_۲+R_۳$$

$$O_۱O_۳+O_۲O_۳=(R_۱-R_۳)+(R_۲+R_۳)=R_۱+R_۲$$

بنابراین مکان هندسی مرکز دایرهٔ $C_۳$ یک بیضی با طول قطر بزرگ $R_۱+R_۲$ با کانون‌های $O_۱$ و $O_۲$ می‌باشد.

۵۷

$$۲a=۴۰ \to a=۲۰ \qquad ۲b=۲۴ \to b=۱۲$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۲۰^۲=۱۲^۲+c^۲ \to ۴۰۰=۱۴۴+c^۲ \to c^۲=۲۵۶ \to c=۱۶$$

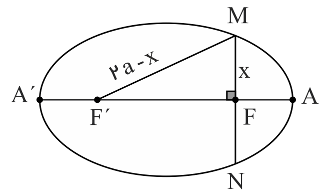
$$\to FF'=HM=۲c=۲\times۱۶=۳۲$$

$$MN=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times۱۲^۲}{۲۰}=۱۴/۴$$

$$S_{MNEH}=MN\times HM=۱۴/۴\times۳۲=۴۶۰/۸$$

۵۸

$$\begin{cases} MF = x \\ MF' + MF = ۲a \end{cases} \to MF' = ۲a - x$$



$$M\overset{\triangle}{F}F': FF'^۲ + MF^۲ = MF'^۲ \to x^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - x)^۲$$

$$\left.\begin{array}{r} \to \cancel{x^۲} + ۴c^۲ = ۴a^۲ + \cancel{x^۲} - ۴ax \\ a^۲ = b^۲ + c^۲ \end{array}\right\} \to ۴c^۲ = ۴(b^۲ + c^۲) - ۴ax$$

$$\to \cancel{۴c^۲} = ۴b^۲ + \cancel{۴c^۲} - ۴ax \to \cancel{۴}\, ax = \cancel{۴}\, b^۲ \to x = \frac{b^۲}{a} \;,\; MN = ۲MF = ۲x = \frac{۲b^۲}{a}$$

۵۹

الف) $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۱ \;\to\; O(-\frac{-۲}{۲}, \frac{۰}{۲}) = (۱, ۰)$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (۰)^۲ - ۴(-۱)} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$x^۲ + y^۲ = ۱ \;\to\; O'(۰, ۰) \;,\; R' = ۱$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = ۱ \\ R + R' = \sqrt{۲} + ۱ \\ |R - R'| = \sqrt{۲} - ۱ \end{array}\right\} \to |R - R'| < OO' < R + R' \to$$ دو دایره متقاطع هستند .

ب) $x^۲ + y^۲ = ۴ \qquad O(۰, ۰) \;,\; R = ۲$

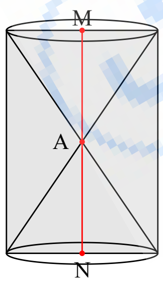
$x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y + ۱۹ = ۰ \qquad O'(-\frac{-۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) = (۴, ۲)$

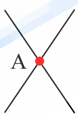
$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۸)^۲ + (-۴)^۲ - ۴ \times ۱۹} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ + ۱۶ - ۷۶} = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۴ - ۰)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \\ R + R' = ۲ + ۱ = ۳ \end{array}\right\} \to OO' > R + R' \to$$ دو دایره متخارج هستند.

۶۰

فصل مشترک صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، برابر با، دو خط متقاطع در نقطهٔ A است (شکل را ببینید).

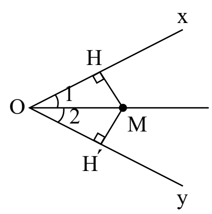




۶۱ **طبق تعریف، مکان هندسی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. بنابراین اثبات در دو مرحله و به‌صورت قضیه دو شرطی انجام می‌شود یعنی ابتدا ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.**

مرحلهٔ ۱:

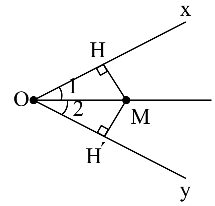
فرض	$M(\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲)$ روی نیمساز $\hat{O}$ قرار دارد
حکم	$MH = MH'$



$$\left.\begin{array}{l} MO = MO \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} M\overset{\triangle}{O}H \cong M\overset{\triangle}{O}H'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

مرحلهٔ ۲:



فرض	$MH = MH'$
حکم	M روی نیمساز O قرار دارد $(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$

$$\left.\begin{array}{l} MO = MO \\ MH = MH' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه}} M\overset{\Delta}{O}H \cong M\overset{\Delta}{O}H' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

۶۲

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -8+2a = 0 \rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

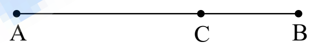
۶۳

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{0} - e\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{0} + f\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{0} = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا دو ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۶۴

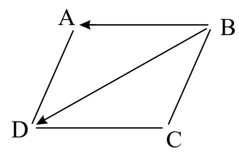
$$A(-3,6,2) \ , \ B(2,1,2) \ , \ |AC| = 4|BC|$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{CB} \Rightarrow C - A = 4B - 4C$$

$$\Rightarrow 5C = A + 4B \Rightarrow C = \frac{1}{5}(A+4B) = \frac{1}{5}(5,10,10) = (1,2,2)$$

۶۵



$$\overrightarrow{BA} = (3,-1,2) \ , \ \overrightarrow{BD} = (2,2,-1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = (-1,3,-3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (-1,3,-3) + (-3,1,-2) = (-4,4,-5)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+16+25} = \sqrt{57}$$

۶۶

$$\begin{cases} a = (0,0,-4) \ , \ b = (-2,1,2) \ , \ |a| = 4 \ , \ |b| = 3 \\ \text{بردار در راستای نیمساز داخلی} = |b|\vec{a} + |a|\vec{b} = 3\vec{a} + 4\vec{b} = (-8,4,-4) = 4(-2,1,-1) \end{cases}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی r، هر مضربی از $3a+4b$ به فرم $r(3a+4b)$ نیز در راستای نیمساز داخلی و بردار a و b است.

$$\Rightarrow |r(3a+4b)| = 4\sqrt{6} \Rightarrow |4r(-2,1,-1)| = 4\sqrt{6} \ , \ |(-2,1,-1)| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |r| = 1 \ \Rightarrow \ r = \begin{cases} 1 & \text{غ‌ق‌ق} \\ -1 \rightarrow & \text{ق ق (زیرا طبق فرض بردار خلاف راستا موردنظر است.)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(3a+4b) \overset{r=-1}{=\!=\!=} (8,-4,4)$$

۶۷

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \Rightarrow (A^2)^5 = I^5 \Rightarrow A^{10} = I$$

۶۸

الف ماتریس اسکالر

ب ندارد

۶۹

الف

$$\overrightarrow{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=\frac{-۲-۳-۱۰}{۴+۱+۲۵}(-۲,۱,-۵)=\frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵)=(۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

ب

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۱,-۳,۲)\times(-۲,۱,-۵)=(۱۳,۱,-۵)$$

۷۰

الف سهمی

ب -۳۰

زیرا:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\۰&-۳&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۲\times(-۳)\times۵=-۳۰$$

پ

صفر، زیرا:

$$a\cdot b=|a||b|\cos\theta=|a||b|\Rightarrow\cos\theta=۱\xrightarrow{۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}}\theta=۰$$

۷۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

۷۲ نقاط B و A، زیرا در این دو نقطه $y=۲$ و $z=۱$ می‌باشد.

۷۳

$$a_{۳۳}=۲,a_{۳۱}=۳+۱=۴,a_{۱۲}=۱-۲=-۱$$

۷۴

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow۲A-I=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&m\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲a-۱&۲b\\۲c&۲d-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۳-m\end{bmatrix}$$

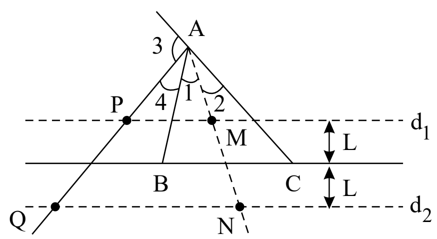
$$۲a-۱=-۱\Rightarrow۲a=۰\Rightarrow a=۰\,,\,۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$$۲c=-۲\Rightarrow c=-۱\,,\,۲d-۱=۳-m\quad(۱)$$

فرض $: a+d=۵\Rightarrow ۰+d=۵\Rightarrow d=۵\quad(۲)$

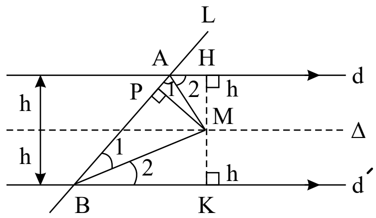
$$(۱),(۲)\Rightarrow۲\times۵-۱=۳-m\Rightarrow m=-۶$$

۷۵ می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از خطی به فاصلهٔ L باشد، دو خط موازی با آن و به فاصلهٔ L از آن است، پس مکان هندسی نقاطی که از BC به فاصلهٔ L باشد، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی با آن می‌باشد. همچنین می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه‌ای به یک فاصله باشد، نیمساز آن زاویه است. پس مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله باشد، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. محل برخورد این دو مکان هندسی پاسخ مسئله می‌باشد. در داخل مثلث تنها یک نقطهٔ M جواب است.



در خارج از مثلث باید در نظر داشت که نیمساز خارجی رأس A هم با خطوط $d_۱$ و $d_۲$ متقاطع است. پس در خارج از مثلث سه نقطهٔ P و N و Q هم پاسخ مسئله است که از اضلاع AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله هستند.

۷۶ مطابق شکل نیمساز زوایای A و B در M یکدیگر را قطع می‌کنند.

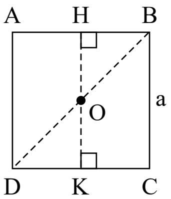


می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} M \text{ روی نیمساز } A \Rightarrow MH = MP = h \\ M \text{ روی نیمساز } B \Rightarrow MP = MK = h \end{cases}$$

بنابراین $MH = MK = h$ می‌باشد. پس مکان هندسی M خطی مثل Δ موازی با d و d' می‌باشد که از وسط فاصله بین دو خط d و d' می‌گذرد.

۷۷ اگر O مرکز مربع باشد داریم:



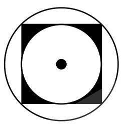
$$HK = a\,,\ OH = OK \Rightarrow OH = OK = \frac{a}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل H و K که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$BD = a\sqrt{۲} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل B و D که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.

در صورت سؤال، نقاط موردنظر است که داخل مربع بوده و بین دو دایره قرار گیرد که همان قسمت هاشورزده شده است.



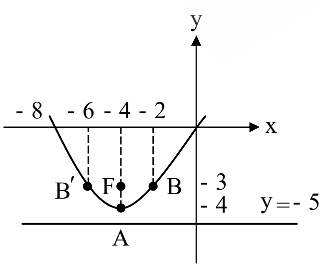
۷۸

$$\text{شرط بی‌شمار جواب: } \frac{-۲}{۴} = \frac{k}{-۶} = \frac{۲}{m} \Rightarrow \begin{cases} m = -۴ \\ k = ۳ \end{cases}$$

۷۹ الف) فرم استاندارد سهمی به‌صورت $(x+۴)^۲ = ۴(y+۴)$ است.

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود. رأس سهمی نقطهٔ $A(-۴, -۴)$ است و $a = ۱$، مختصات کانون آن نقطه $F(-۴, -۴+۱) = (-۴, -۳)$ است. معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $y = -۴ - ۱ = -۵$ است.

ب) نقاط کمکی $B(-۲, -۳)$ و $B'(-۶, -۳)$ برای رسم سهمی استفاده می‌کنیم؛ شکل سهمی به‌صورت مقابل است.



۸۰

$$OM = OA = a$$

$$\overset{\Delta}{OMF} : OF^۲ + MF^۲ = OM^۲ \to c^۲ + MF^۲ = a^۲ \to MF^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲ \to MF = b$$

۸۱

$$\text{می‌دانیم: } c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \to c = ۴$$

از طرفی:

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \to MF' = ۱۰ - MF$$

با توجه به شکل داریم:

قضیهٔ فیثاغورس: $(MF)^۲ + (MF')^۲ = (FF')^۲ \rightarrow (MF)^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲$

$\rightarrow ۲MF^۲ - ۲۰MF + ۳۶ = ۰ \rightarrow MF^۲ - ۱۰MF + ۱۸ = ۰ \rightarrow MF = ۵ \pm \sqrt{۷}$

۸۲

$(x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱ \rightarrow O(۲,۲)\ ,\ r = ۱$

$d = \dfrac{|۳(۲)+۲|}{\sqrt{۱۰}} = \dfrac{۸}{\sqrt{۱۰}} \rightarrow d > r$

خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۸۳

الف تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با:

$\vec{a}' = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b} = \dfrac{(۱,۲,۳)\cdot(-۲,۰,۲)}{(-۲,۰,۲)\cdot(-۲,۰,۲)}(-۲,۰,۲) = \dfrac{-۲+۶}{۴+۴}(-۲,۰,۲) = (-۱,۰,۱)$

ب

$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲(۱,۲,۳) - (-۲,۰,۲) = (۴,۴,۴)\ ,\ |۲\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۱۶+۱۶+۱۶} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$

۸۴

الف بردار $\vec{a}$ در ناحیهٔ چهارم

ب

$\vec{a} + ۲\vec{b} = (۳,-۲,۱) + ۲(-۲,۱,-۱) = (-۱,۰,-۱)$

$|\vec{a} + ۲\vec{b}| = \sqrt{۲}$

پ ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر آنها عمود است.

$\vec{a} \times \vec{b} = (۱,۱,-۱)$

۸۵

الف درست

$A_{۱\times۳} \times B_{۳\times۱} = C_{۱\times۱} =$ عدد

ب نادرست

مثال نقض : $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \overline{O}$

۸۶

الف به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی، بقیه درایه‌ها صفر هستند.

ب قطری بوده و همه درایه‌های روی قطر اصلی باهم برابرند.

۸۷

الف درست

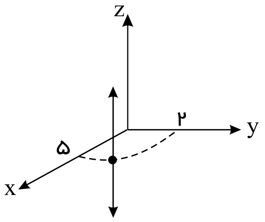
ب درست – زیرا هر نقطه روی سهمی از F و d به یک فاصله است.

۸۸

الف درست – بنابر قانون وجود مثلث:

$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

ب درست



۸۹

الف نادرست

ب نادرست

۹۰

الف بردار $\vec{a}$ در ناحیهٔ ۵ واقع است.

ب

$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲(۱,۲,-۱)-(۰,۲,-۱)=(۲,۲,-۱)\Rightarrow |۲\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$$