نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۵۴۸۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی (تجربی) دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱) تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[۰,۲۵]$ چقدر است؟

۲) اگر بدانیم: $f(x)=x+b$، $g(x)=ax^۲-bx+c$ و $gof(x)=-x^۲-۳x+۷$، مقدار پارامتر c را به‌دست آورید.

۳) اگر $f=\{(۳,۲),(۲,۰),(۰,-۳)\}$ و $g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & ; x>۰ \\ x^۲-۱ & ; x\leq ۰ \end{cases}$ بوده و تساوی $f^{-۱}og(m)=۲$ نیز برقرار باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۴) اگر $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

۵) اگر تابع f اکیداً صعودی و تابع g اکیداً نزولی باشد با فرض اینکه تابع fog تعریف‌شده می‌باشد، ثابت کنید fog اکیداً نزولی است.

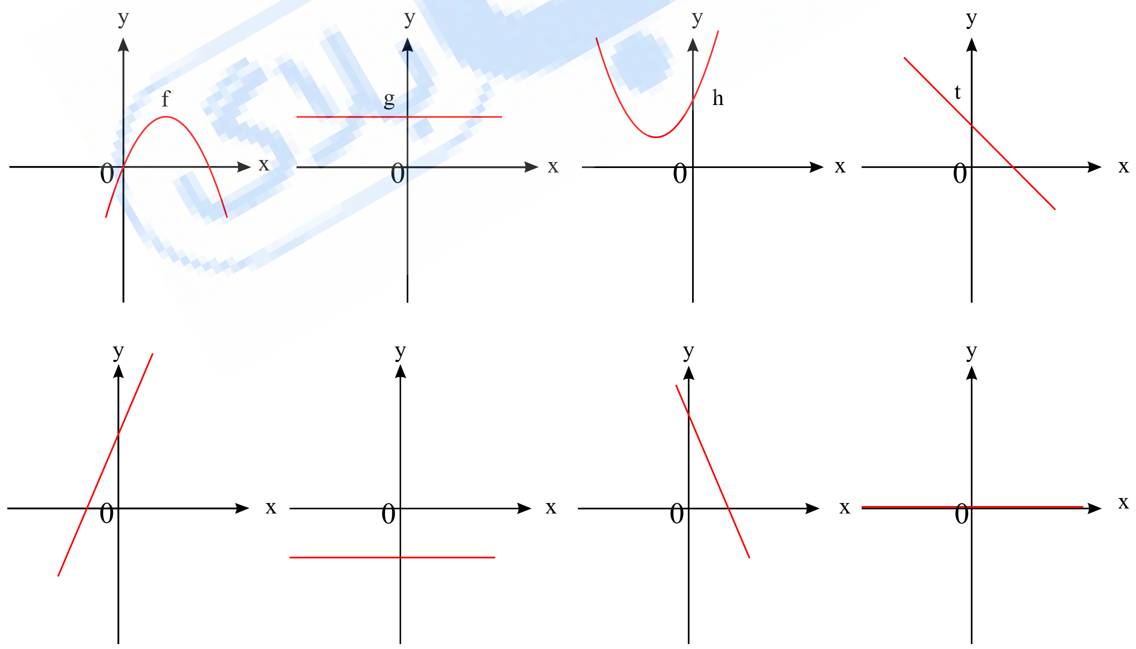
۶) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برد تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

ب) چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دو جمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

پ) دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه با هم رخ ندهند.

۷) نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.



۸) حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x}}{|۲x|}$ در نقطهٔ $x=۰$ را بدست آورید.

۹) اگر $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=-۶$، حاصل $\left(f(\dfrac{۱}{x})\right)'$ به‌ازای $x=\dfrac{۱}{۴}$ چقدر است؟

۱۰ اگر $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ax - b$ بر $x - ۲$ بخش‌پذیر باشد، نشان دهید:

$۲a + ۴ = b$

۱۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

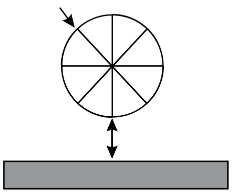
الف تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

ب تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۲ خودرویی در امتداد خط راست طبق معادلهٔ $d(t) = -۵t^۲ + ۲۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰ \leq t \leq ۵$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = ۲$ چقدر است؟

۱۳ در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان، دفترچهٔ سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچهٔ سلامت دارد؟

۱۴ فرض کنید چرخ‌وفلکی به قطر $۲۰m$ داریم. اگر پایین‌ترین نقطهٔ چرخ‌وفلک ۳ متر از سطح زمین بالاتر باشد، ارتفاع کابین مشخص شده (در شکل) را از سطح زمین به شکل تابعی از زاویهٔ α، که کابین با محور فقی چرخ‌وفلک در هر لحظه می‌سازد، بیابید.



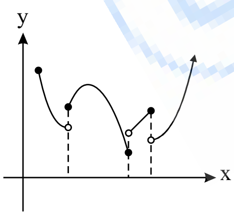
۱۵ تحقیق کنید تابع مقابل یک به یک است و سپس ضابطهٔ تابع معکوس آن را بنویسید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$$

۱۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۰ \\ x & x \geq ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۱۷ در دو جعبه به‌ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به‌تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

۱۸ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع زیر را مشخص کنید.



۱۹ تابع $h(x) = ۹^x - ۳^{x+۱}$ را به‌صورت ترکیب دو تابع دیگر بنویسید.

۲۰ برای تابع $f(x) = \frac{-x}{x - ۱}$، ضابطهٔ تابع مرکب fof را به‌دست آورید. دامنهٔ تابع fof چگونه است؟

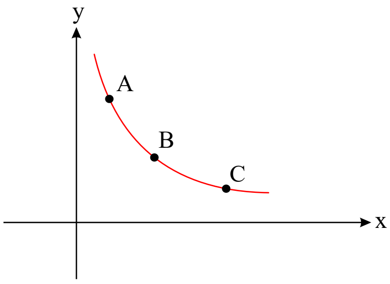
۲۱ تابع مرکب fog تحت چه شرایطی قابل انجام یا قابل تعریف است؟ تابع مرکب gof چطور؟

۲۲ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-۸x + ۳}{۲}$

ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$

۲۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مقادیر مشتق تابع f در نقاط C, B, A را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۲۴ اگر $\frac{۵\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ و $\tan\alpha = \frac{۲m-۱}{۳}$، آنگاه حدود m را بیابید.

۲۵ توابع f و g هردو اکیداً نزولی هستند و تابع fog تعریف شده است. اگر $fog(m^۲) = ۲a - ۱$ و $fog(m^۲+۱) = -a+۴$ باشند، حدود a را بیابید.

۲۶ تابع $y = x^۳$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۲۷ تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x^۲-۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ نمودار تابع f' را رسم کنید.

۲۸ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x$

ب

$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$

۲۹ ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف

$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

ب

$g(x) = ۱ + \sqrt{x-۲}$

پ

$h(x) = x^۲ + ۱$

۳۰ یک بیضی افقی با دایرهٔ $C: x^۲ + y^۲ + ۲x = ۸$ هم‌مرکز است. اگر قطر بیضی دو واحد بزرگ تر از قطر دایره و قطر کوچک بیضی دو واحد کوچک‌تر از قطر دایره باشد، مختصات رئوس و کانون‌ها و مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی و اندازهٔ خروج از مرکز بیضی را بیابید.

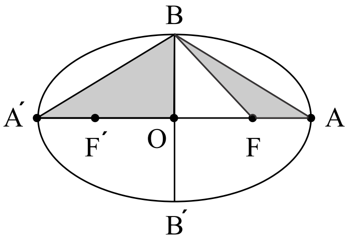
۳۱ نمودار تابع $f(x) = (x+۱)^۳$ را رسم کنید. این تابع در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

۳۲ اگر $f(x) = x^۳ - ۲$، $f'(-۱)$ را به‌دست آورید.

۳۳ مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ زیر را بیابید.

$۴x^۲ + ۴y^۲ - ۴x + ۸y - ۱۰ = ۰$

۳۴) در بیضی زیر اگر مساحت مثلث BAF یک‌سوم مساحت مثلث $A'OB$ باشد و طول قطر کوچک بیضی ۴ باشد، خروج از مرکز و طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.



۳۵) دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ توپ قرمز و ۲ توپ آبی و دومی شامل ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. به‌طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها دو توپ باهم خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که توپ‌ها همرنگ نباشند چقدر است؟

۳۶) سه ظرف همانند داریم، ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۱۱ مهرهٔ آبی است. ظرف دوم شامل ۳ مهرهٔ قرمز و ۹ مهرهٔ آبی و ظرف سوم شامل مهره‌های آبی می‌باشد. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره خارج‌شده آبی باشد چقدر است؟

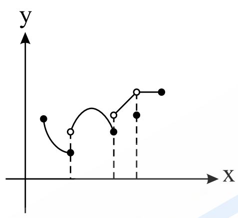
۳۷) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

۳۸) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ آن را به‌شکل استاندارد بنویسید.

۳۹) مقادیر اکسترمم مطلق تابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x)=-x^2+6x-2 \quad , x\in[-2,5]$$

۴۰) در تابع زیر نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



۴۱) نقاط اکسترمم نسبی تابع‌های زیر را بیابید.

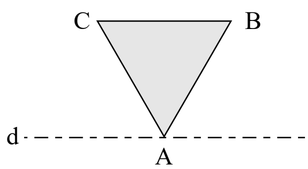
الف) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ب) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

۴۲) تابع $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+4}$ در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی و در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی است؟

۴۳) مشخص کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

الف) $f(x)=-5x+2$ ب) $f(x)=\sqrt{x-3}$

۴۴) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

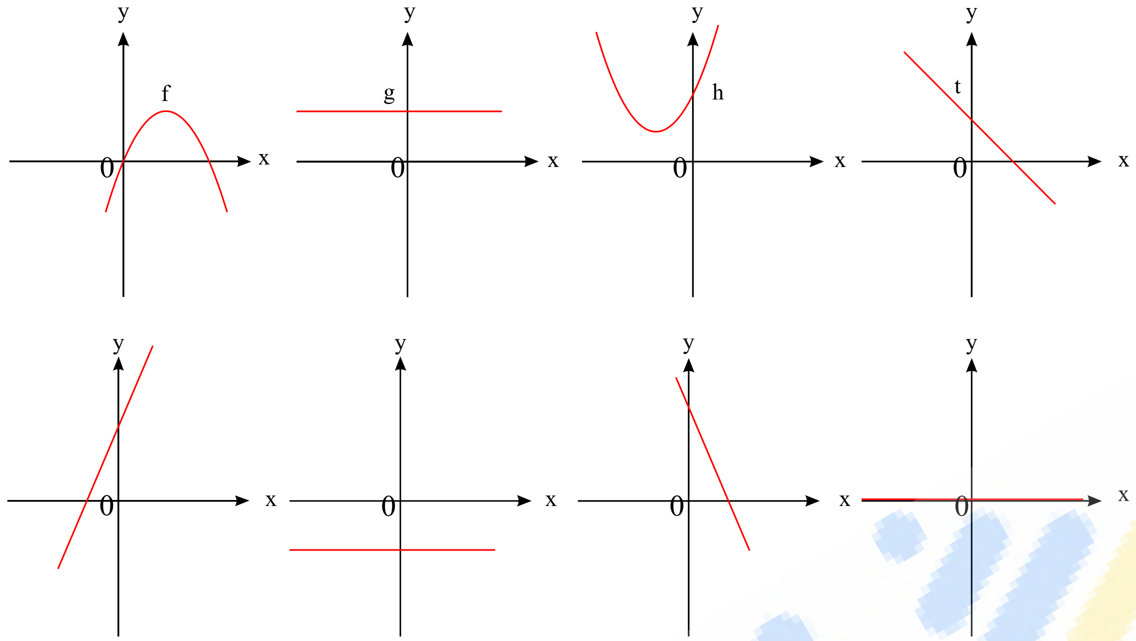


۴۵) باتوجه به ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{1-2x}$ و $g(x)=\dfrac{1-3x}{x+2}$، دامنهٔ تابع مرکب fog و ضابطهٔ آن را به‌دست آورید.

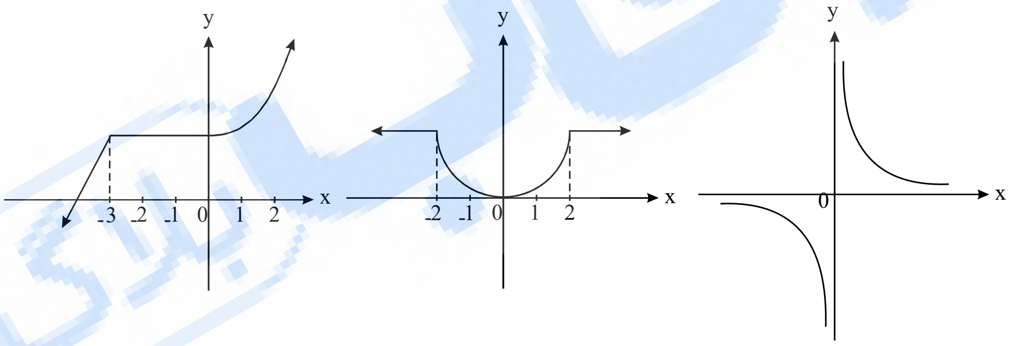
۴۶) نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را به‌کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

۴۷) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۴۸) نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۴۹) نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y=f(x)$ $y=g(x)$ $y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

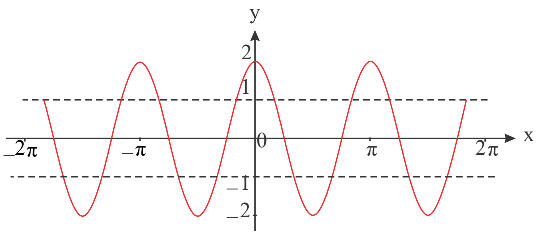
ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

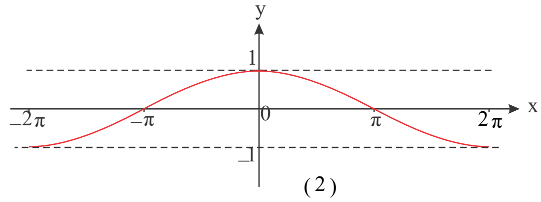
۵۰) اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)$

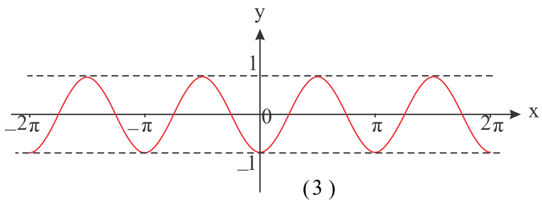
۵۱ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.



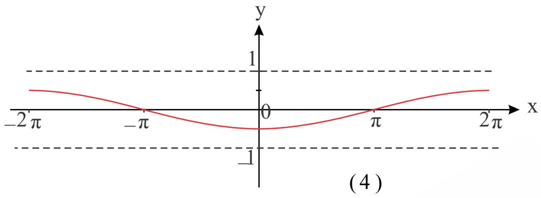
(1)



(2)



(3)



(4)

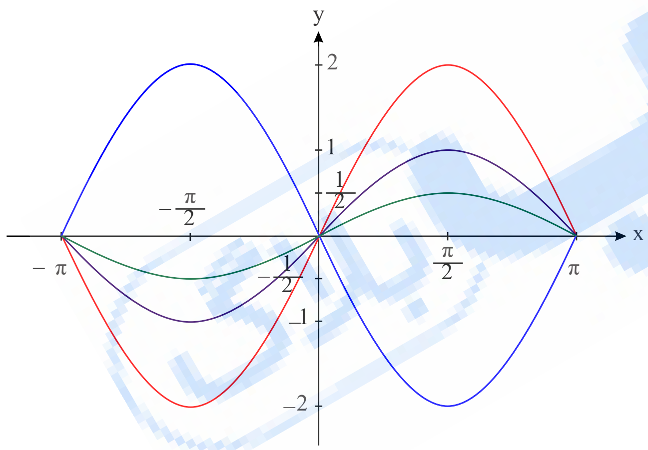
الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$ پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$

۵۲ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

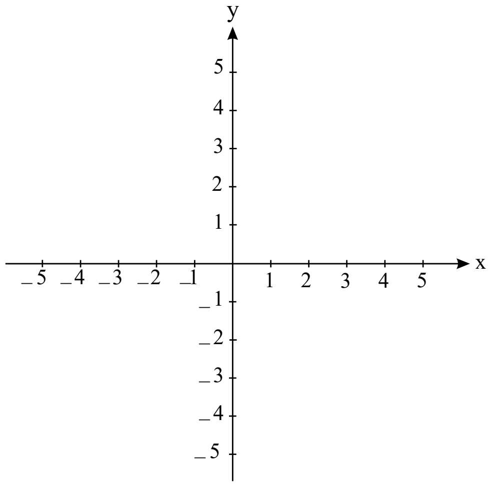
الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}$ ؛ $g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ب) $k(x)=x^۵$ ؛ $l(x)=۳x^۲-۴x+۱$

۵۳ در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



۵۴ نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

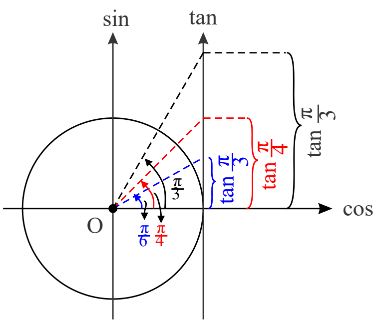


۵۵ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-۱)^۳-۱$ ب) $y=(x+۲)^۳-۲$

۵۶ حد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۵x^۶-۷x^۵+۱۶}{۵x^۳-۳x^۵}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$، تعیین کنید.

۵۷ با توجه به شکل مقابل جای خالی را در جملهٔ داده‌شده به‌طور مناسب پر کنید. «اگر زاویهٔ α تنها داخل یک ربع دستگاه مختصات تغییر کند در هر چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی با افزایش زاویهٔ α همواره تانژانت زاویه .... می‌یابد.»



۵۸ نمودار هریک از توابع داده‌شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

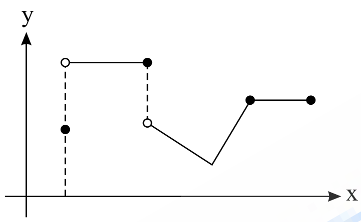
الف) $y=|\sin x|$

ب) $y=|\cos ۲x|$

۵۹ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-x^۳+۶x^۲-۲$ را بیابید.

۶۰ از بین مستطیل‌هایی با قطر ۴ سانتی‌متر، بیشترین محیط مستطیل را بیابید.

۶۱ در نمودار مقابل نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



۶۲ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x+۵}, x<-۵$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از -۱۰۰۰۰ باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۶۳ در تابع $f(x)=(x^۲-۴)\,[x+۱]$ حاصل $f'_{-}(۲)+f'_{+}(۲)$ را بیابید.

۶۴ در تابع $f(x)=(۱-x)\,[x]-|x-۱|$ حاصل $f'_{+}(۱)+f'_{-}(۱)$ را بیابید.

۶۵ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x=-۲$ را بررسی کنید.

۶۶ اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$، آنگاه مشتق تابع gof را در نقطهٔ $x=۰$ بیابید.

۶۷ اگر $f(x)=g(x^۲+x)$ و $f'(۲)=۵$، آنگاه $g'(۶)$ را بیابید.

۶۸ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x\sqrt{x-۳}$ در نقطهٔ $x=۴$ را بیابید.

۶۹ اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^n+mx^۳+x^۲-۱}{۴x^۳+x^۲-۳}=-۲$، آنگاه m و n را بیابید. $(n\in\mathbb{N})$

۷۰ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx^۲+(x+۲)^۲-۷x)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

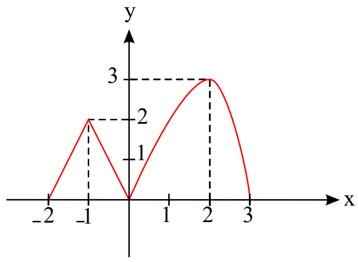
۷۱ اگر $\tan\alpha\le-۱$، آنگاه حدود α را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابید.

۷۲ نمودار تابع $y=|\log_۲(x+۱)|$ را رسم و یکنوایی آن را بررسی کنید.

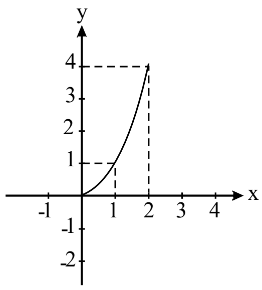
۷۳ با فرض $f(x)=x^۲$ توضیح دهید نمودار تابع $g(x)=-۲(۳x+۴)^۲+۵$ چگونه از نمودار f رسم می‌شود؟

۷۴ نمودار تابع $y=-\sin(۲x)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۷۵ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.



۷۶ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.



الف

$y=f(-x)$

ب

$y=-f(x)$

پ

$y=-f(-x)$

۷۷ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۳+x^{۲}}}{x^{۲}}=+\infty$$

ب

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x-۲)^{۴}}=+\infty$$

پ

$$\lim_{x\to -۲}\left|\frac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$$

۷۸ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف

$$f(x)=(۴x-۱)(x^{۲}-۵)^{۳}$$

ب

$$y=\sqrt[۵]{(x^{۳}-۹x)^{۲}}$$

پ

$$f(x)=۳x^{۲}\sqrt{۵x^{۲}-۶}$$

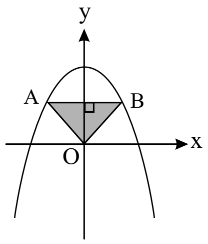
ت

$$y=\frac{(x^{۲}-۱)^{۳}}{x^{۳}+۲x}$$

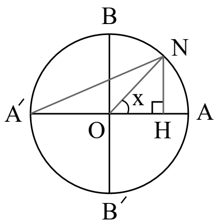
۷۹ اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.

۸۰ جسمی از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب شده است، که معادلهٔ ارتفاع آن از سطح زمین به‌صورت $f(t) = -۲t^۲ + ۱۰t$ است. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = ۲$ به دست آورید.

۸۱ در سهمی به معادلهٔ $y = ۲۷ - x^۲$ مثلث متساوی‌الساقین OAB محاط شده است. ماکزیمم مساحت این مثلث چقدر است؟



۸۲ با استفاده از شکل داده شده، ابتدا درستی اتحاد مقابل را ثابت کنید.



$$\tan \frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$$

سپس حاصل $\tan ۲۲/۵^\circ$ را بیابید.

۸۳ مقدار عددی عبارت $(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$ را بیابید.

۸۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۴x - x^۲ - ۳ & , \quad x < ۲ \\ x - ۲ & , \quad x \geq ۲ \end{cases}$ مفروض است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست آورید.

۸۵ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^۲$ گرم است.

الف جرم این تودهٔ باکتری در بازهٔ زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظه $t = ۹$ چقدر است؟

۸۶ حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف
$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۲ + \sin x} - \sqrt{۲ - \sin x}}{۳x}$$

ب
$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲ - ۱} + x - ۱}{\sqrt{۴x - ۴} + x^۲ - ۱}$$

پ
$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{۳ - [x]}{x - ۳}\sqrt{x^۲ - ۶x + ۹}$$

۸۷ درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف خروج از مرکز بیضی شاخصی است که انحنای بیضی را با دایره مقایسه می‌کند.

ب در بیضی افقی، طول رئوس کانونی و کانون‌ها با طول مرکز تقارن بیضی یکسان است.

پ اگر صفحه‌ای سطح مخروطی دوّار را عمود بر محورش قطع کند مقطع حاصل همواره یک دایرهٔ حقیقی خواهد بود.

ت خروج از مرکز بیضی عددی بین صفر و یک است. هر قدر این عدد به یک نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر خواهد بود.

۸۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف اگر $f(x) = \cos x$ باشد، آنگاه نمودارهای $y = f(x)$ و $y = f(-x)$ برهم منطبق هستند.

ب اگر $f(x) = \log x$ و $g(x) = -\log(x-۲) + ۴$، آنگاه نمودار g را می توان از نمودار f با انتقال دو واحد به سمت راست، سپس قرینه نسبت به محور xها و ۴ واحد انتقال به بالا به دست آورد.

۸۹ حد زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{|x-۲|}$$

۹۰ با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

ب ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

پ پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ت ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵-۰} = \frac{(۳۵+۵۰)-(۰+۵۰)}{۲۵} = \frac{۳۵}{۲۵} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

۲ ابتدا باتوجه به ضابطه‌های f و g، ضابطهٔ تابع ترکیب gof را می‌یابیم و سپس مرتب‌شدهٔ آن را با عبارت معادل‌اش، یعنی $-x^۲-۳x+۷$، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(x+b)=a(x+b)^۲-b(x+b)+c$$
$$=ax^۲+۲abx+ab^۲-bx-b^۲+c=ax^۲+(۲ab-b)x+(ab^۲-b^۲+c)$$
$$\xrightarrow{\text{حال باید}} ax^۲+(۲ab-b)x+(ab^۲-b^۲+c)=-x^۲-۳x+۷\to\begin{cases}a=-۱\\ ۲ab-b=-۳\\ ab^۲-b^۲+c=۷\end{cases}$$

روند محاسبهٔ پارامترهای b و c اینگونه است:

$$a=-۱\xrightarrow{۲ab-b=-۳}-۲b-b=-۳\to-۳b=-۳\to b=۱$$
$$\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\end{cases}\xrightarrow{ab-b^۲+c=۷}-۱-۱+c=۷\to c=۹$$
$$\to\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\\ c=۹\end{cases}$$

۳ باتوجه به رابطهٔ ۲ $f^{-۱}og(m)=f^{-۱}(g(m))=$، ابتدا مقدار $g(m)$ را (به‌صورت پارامتری) از روی ضابطهٔ g به‌دست می‌آوریم:

یعنی برای $m>۰$، $g(m)$ برابر $m^۲+۱$ و برای $m\le۰$ برابر $m^۲-۱$ است.

$$g(m)=\begin{cases}m^۲+۱ & ;m>۰\\ m^۲-۱ & ;m\le۰\end{cases}$$

درنتیجه آن رابطهٔ اولیه به‌صورت ۲ $f^{-۱}(m^۲+۱)=$ (برای $m>۰$) یا ۲ $f^{-۱}(m^۲-۱)=$ (برای $m\le۰$) تبدیل خواهد شد. حال باتوجه به این نکته که «اگر $f^{-۱}(a)=b$، آن‌گاه $f(b)=a$ برقرار است.» داریم:

$$\begin{cases}\text{برای } m>۰: & f(۲)=m^۲+۱\\ \text{برای } m\le۰: & f(۲)=m^۲-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲,۰)\in f]{\text{از روی مجموعهٔ } f}\begin{cases}\text{برای } m>۰: & m^۲+۱=۰\to m^۲=-۱\to \text{فاقد جواب}\\ \text{برای } m\le۰: & m^۲-۱=۰\to m^۲=۱\to m=\pm۱\xrightarrow{(m\le۰)}m=-۱\ \checkmark\end{cases}$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول برای m همان -۱ بوده و داریم: ۲ $f^{-۱}og(-۱)=$

۴ با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطهٔ توابع مرکب fog و fof داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow[\frac{۳}{x}\text{ قرارمی‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ ِ} f}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنهٔ این تابع در مرحلهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=۰$ و $x=۳$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{۲}{x-۱})\xrightarrow[\frac{۲}{x-۱}\text{ قرار بده}]{\text{به جای } x \text{ ِ} f}\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

برای تعیین دامنهٔ این تابع نیز با توجه به مرحلهٔ ساده نشدهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}$، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=۳$ و $x=۱$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$

۵ برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ fog داریم:

$$x_۱<x_۲\xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}}g(x_۱)>g(x_۲)\xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}}f(g(x_۱))>f(g(x_۲))$$
$$x_۱<x_۲\Rightarrow(fog)(x_۱)>(fog)(x_۲)\Rightarrow \text{ اکیداً نزولی است. } fog$$

۶

الف نادرست

علت: برد تابع $y=kf(x)$، k برابر برد تابع $y=f(x)$ است.

درست

$$f(-۲) = -۱۶ + ۲۰ + ۶ - ۱۰ = ۰$$

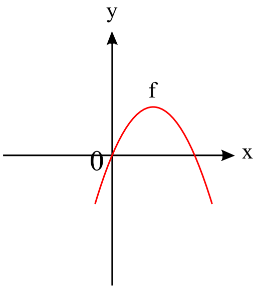
علت:

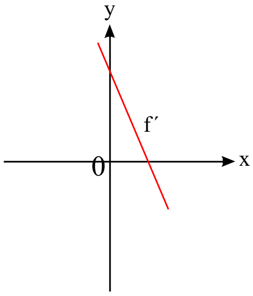
پ نادرست

علت: دو پیشامد A و B مستقل هستند هرگاه انجام یکی تأثیری روی انجام دیگری نداشته باشد.

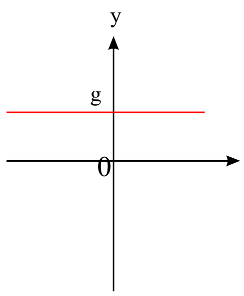
۷

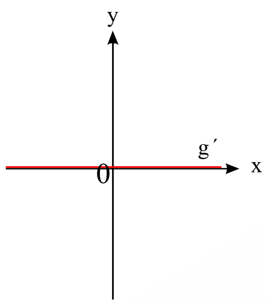
۱) شکل ابتدا صعودی و سپس نزولی است. آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار f' بالای محور xها و آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار f' پایین محور x است.



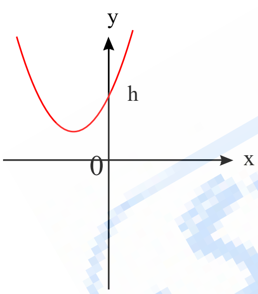


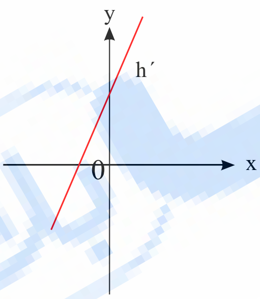
۲) g تابع ثابت است و مشتق آن صفر می‌شود. بنابراین نمودار g' روی محور xها است.



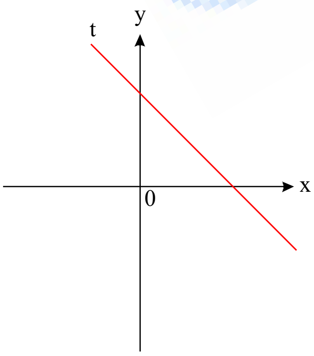


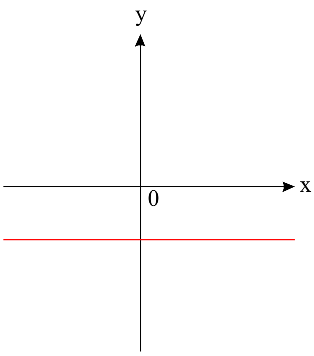
۳) شکل ابتدا نزولی و سپس صعودی است. آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار h' پایین محور xها و آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار h' بالای محور xها است.





۴) شکل یک تابع خطی با شیب منفی است پس مشتق آن یک عدد منفی است یعنی نمودار t' آن یک خط افقی پایین محور xها است.





۸ برای بدست آوردن حد تابع، ابتدا حد راست و چپ تابع در $x = ۰$ بدست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \frac{\sqrt{۱ - ۰}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \frac{\sqrt{۱ - ۰}}{۰^+} = +\infty$$

پس حد تابع $f(x)$ در $x=۰$ برابر $+\infty$ است.

۹

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=-۶\Rightarrow f'(۴)=-۶$$

$$(f(\frac{۱}{x}))'=\frac{-۱}{x^۲}f'(\frac{۱}{x})\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}f'\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}\right)=-۱۶f'(۴)$$

$$=-۱۶\times(-۶)=۹۶$$

۱۰ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(۲)=۰\Rightarrow ۲\times ۲^۳-۳\times ۲^۲+۲a-b=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶-۱۲+۲a-b=۰\Rightarrow ۲a+۴=b$$

۱۱

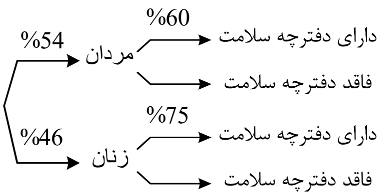
الف درست

ب نادرست

۱۲

$$d(t)=-۵t^۲+۲۰t\to d'(t)=-۱۰t+۲۰\to d'(۲)=-۲۰+۲۰=۰$$

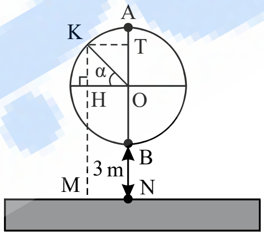
۱۳



$$P(\text{مطلوب})=\frac{۵۴}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۴۶}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}\to P(\text{مطلوب})=\frac{۳۲۴}{۱۰۰۰}+\frac{۳۴۵}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶۹}{۱۰۰۰}$$

۱۴ فرض می‌کنیم کابین با محور افقی چرخ‌وفلک زاویهٔ $\hat{\alpha}$ می‌سازد.

باتوجه به شکل داریم:



ارتفاع کابین از زمین $y=AN-AT$

$$y=۲۳-(OA-OT)\xrightarrow{OA=۱۰}y=۲۳-(۱۰-OT)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{OHK}$: $\frac{KH}{OK}=\sin\alpha\xrightarrow{OK=۱۰}۱۰\sin\alpha=KH\xrightarrow{KH=OT}۱۰\sin\alpha=OT\Rightarrow y=۲۳-(۱۰-۱۰\sin\alpha)$

$$\Rightarrow y=۲۳-۱۰+۱۰\sin\alpha$$

$$y=۱۳+۱۰\sin\alpha$$

۱۵

$$f(x_۱)=f(x_۲)$$

$$\frac{x_۱}{\sqrt{x_۱^۲+۱}}=\frac{x_۲}{\sqrt{x_۲^۲+۱}}\Rightarrow x_۱\sqrt{x_۲^۲+۱}=x_۲\sqrt{x_۱^۲+۱}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم $\Rightarrow x_۱^۲(x_۲^۲+۱)=x_۲^۲(x_۱^۲+۱)\Rightarrow x_۱^۲x_۲^۲+x_۱^۲=x_۲^۲x_۱^۲+x_۲^۲\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow |x_۱|=|x_۲|\Rightarrow x_۱=x_۲$ تابع یک به یک است. **توجه کنید** $(*)$

چون دو کسر با هم مساوی‌اند و مخرج دو کسر علامت مثبت دارد پس صورت‌ها با هم، هم علامت هستند.

برای یافتن ضابطه تابع معکوس قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\Rightarrow \text{دو طرف به توان ۲}$$

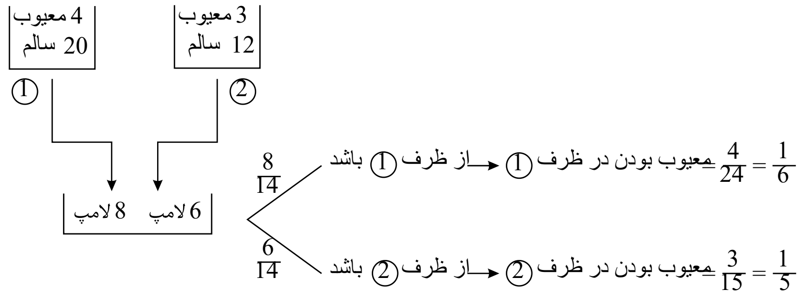
$$y^۲=\frac{x^۲}{x^۲+۱}\Rightarrow y^۲x^۲+y^۲=x^۲\Rightarrow y^۲x^۲-x^۲=-y^۲\Rightarrow x^۲(y^۲-۱)=-y^۲\Rightarrow x^۲=\frac{y^۲}{۱-y^۲}\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}}$$ x و y هم علامت‌اند

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

۱۶ برای محاسبهٔ مشتق راست سراغ ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ مشتق چپ سراغ ضابطهٔ بالا می‌رویم.

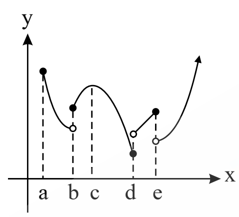
$$\left.\begin{array}{l} x\geq ۰ \to f(x)=x\to f'_+(۰)=۱ \\ x<۰\to f(x)=x^۲\to f'(x)=۲x\to f'_-(۰)=۰ \end{array}\right\}\to f'_+(۰)\neq f'_-(۰)$$

۱۷



$$P(\text{معیوب بودن})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۱۰+۹}{۳\times۷\times۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$

۱۸



در $x=b$ اکسترمم نسبی ندارد.

در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

در $x=d$ مینیمم نسبی و مینیمم مطلق دارد.

در $x=e$ ماکزیمم نسبی دارد.

تابع ماکزیمم مطلق ندارد.

۱۹ اگر تابع h را به شکل $h(x)=۹^x-۳^{x+۱}=(۳^x)^۲-۳\times۳^x$ بازنویسی کنیم به روشنی می‌توانیم ببینیم که با فرض $f(x)=x^۲-۳x$ و $g(x)=۳^x$، تابع ترکیب $fog(x)$ همان تابع $h(x)$ خواهد بود:

$$\begin{cases} f(x)=x^۲-۳x \\ g(x)=۳^x \end{cases}\to fog(x)=f(g(x))=f(۳^x)=(۳^x)^۲-۳(۳^x)$$

$$=(۳^۲)^x-۳^{۱+x}=۹^x-۳^{x+۱}=h(x)$$

۲۰ برای از بین بردن علامت منفی در صورت کسر ضابطهٔ f، ابتدا ضابطهٔ آن را به فرم $f(x)=\frac{x}{۱-x}$ نوشته و سپس باتوجه به تعریف $fof(x)=f(f(x))$ ضابطهٔ تابع مرکب fof را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{۱-x}\right)=\frac{\left(\frac{x}{۱-x}\right)}{۱-\left(\frac{x}{۱-x}\right)}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-x-x}{۱-x}}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-۲x}{۱-x}}$$

$$\xrightarrow[\text{صورت و مخرج را در }(۱-x)\text{ ضرب می‌کنیم.}]{\text{باتوجه به شرط }۱-x\neq۰\ (x\neq۱)}fof(x)=\frac{x}{۱-۲x}$$

و اما درمورد دامنهٔ تابع fof، باتوجه به ضابطهٔ به‌دست آمده می‌بایستی $۱-۲x\neq۰$ و درنتیجه $x\neq\frac{۱}{۲}$ باشد و البته با درنظر گرفتن آن شرط $x\neq۱$ به این نتیجه می‌رسیم که دامنهٔ fof به‌صورت $x\neq۱,\frac{۱}{۲}$ یا $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱}{۲}\}$ می‌باشد.

۲۱ باتوجه به تعاریف $fog(x)=f(g(x))$ و $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$، تابع مرکب fog به‌ازای xهایی قابل تعریف است که اولاً به‌ازای آن x مقدار $g(x)$ موجود باشد و ثانیاً تابع f به‌ازای این مقدار (یعنی $g(x)$) قابل تعریف باشد. در این صورت تابع fog به‌ازای x به‌صورت $fog(x)=f(g(x))$ تعریف می‌شود.

به همین منوال و باتوجه به تعاریف $gof(x)=g(f(x))$ و $D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$، تابع مرکب gof به‌ازای xهایی قابل انجام و تعریف است که اولاً به‌ازای آن x مقدار $f(x)$ موجود و حقیقی باشد، ثانیاً تابع g به‌ازای این مقدار (یعنی $f(x)$) قابل تعریف باشد. در این صورت تابع gof به‌ازای x به‌صورت $gof(x)=g(f(x))$ قابل تعریف خواهد بود.

۲۲

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{\times۲}۲y=-۸x+۳\xrightarrow{-۳}-۸x=۲y-۳$

$$\xrightarrow{\div(-۸)}x=\frac{۲y-۳}{-۸}=\frac{-۱}{۴}y+\frac{۳}{۸}\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-۱}(x)=\frac{-۱}{۴}x+\frac{۳}{۸}$$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\ :\ y=-۵-\sqrt{۳x+۱}\rightarrow y+۵=-\sqrt{۳x+۱}$

$$\xrightarrow[\begin{pmatrix} y+۵\leq ۰ \\ y\leq -۵ \end{pmatrix}]{\text{به توان ۲ برسان}}(y+۵)^{۲}=(۳x+۱)\xrightarrow{-۱}(y+۵)^{۲}-۱=۳x\xrightarrow{\div ۳}x=\frac{۱}{۳}(y+۵)^{۲}-\frac{۱}{۳}$$

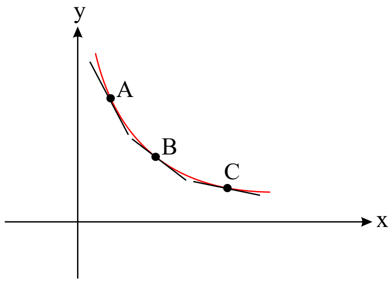
$$x\geq\frac{-۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}(x+۵)^{۲}-\frac{۱}{۳}$$

که با توجه به شرایط $y\leq -۵$ و $x\geq\frac{-۱}{۳}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-۱}}=R_g=(-\infty,-۵]\ ,\ R_{g^{-۱}}=D_g=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$$

۲۳ با رسم خطوط مماس بر منحنی f در نقاط C, B, A داریم:

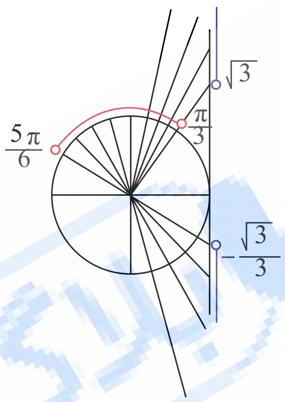


$\rightarrow$ شیب خط مماس در C $<$ شیب خط مماس در B $<$ شیب خط مماس در A

$f'(A)<f'(B)<f'(C)$

۲۴ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi-\frac{\pi}{۶}$$



$$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\tan\alpha>\sqrt{۳}\ \text{ یا }\ \tan\alpha<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۲m-۱}{۳}>\sqrt{۳}\ \text{ یا }\ \frac{۲m-۱}{۳}<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲m-۱>۳\sqrt{۳}\ \text{ یا }\ ۲m-۱<-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow m>\frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲}\ \text{ یا }\ m<\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۵ برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ fog داریم:

$$x_۱<x_۲\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } g}g(x_۱)>g(x_۲)\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f}f(g(x_۱))<f(g(x_۲))$$

$$x_۱<x_۲\Rightarrow fog(x_۱)<fog(x_۲)\Rightarrow \text{اکیداً صعودی } fog$$

$$\text{می‌دانیم}\ :\ m^{۲}+۱>m^{۲}\Rightarrow fog(m^{۲}+۱)>fog(m^{۲})\Rightarrow -a+۴>۲a-۱$$

$$\Rightarrow ۴+۱>۲a+a\Rightarrow ۳a<۵\Rightarrow\boxed{a<\frac{۵}{۳}}$$

۲۶

$$y=x^{۳}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=(-x)^{۳}=-x^{۳}\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}}y=-(x+۲)^{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}}y=f(x)=-(x+۲)^{۳}+۵\Rightarrow(x+۲)^{۳}=۵-y$$

$$\Rightarrow x+۲=\sqrt[۳]{۵-y}\Rightarrow x+۲=-\sqrt[۳]{y-۵}\Rightarrow x=-۲-\sqrt[۳]{y-۵}$$

$$\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=-۲-\sqrt[۳]{x-۵}$$

۲۷ در x=۰ مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند (نقطهٔ گوشه)، بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

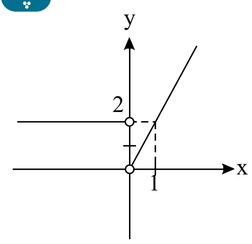
الف

$$\left.\begin{array}{l} f'(۰^{+})=۲x=۰ \\ f'(۰^{-})=۲ \end{array}\right.\rightarrow f'(۰^{+})\neq f'(۰^{-})$$

ب

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ & x<۰ \\ ۲x & x>۰ \end{cases}$$

پ



۲۸

نکته: $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را ساده می‌کنیم:

الف

$$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x \Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۳\cos x = ۴\cos^۲ x$$
$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۴\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow ۱)\ \cos x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$۲)\ ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۶+۴۸=۶۴} = ۸$$
$$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \text{نا ممکن است.} \\ \frac{۴-۸}{۸} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب

نکته: $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x$ ، $۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$۳\sin x - ۴\sin^۳ x + ۲\cos ۲x = ۲ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲ - ۲\cos ۲x = ۲(۱-\cos ۲x)\qquad (*)$$
$$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲\times ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۴\sin^۳ x + ۴\sin^۲ x - ۳\sin x = ۰$$
$$\Rightarrow \sin x(۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow ۱)\ \sin x = ۰ = \sin(۰) \Rightarrow x = k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$۲)\ ۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x + ۳)(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-۳}{۲} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\quad (k\in\mathbb{Z}) \\ ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}\quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

۲۹

الف کافی است که در هر مورد x را برحسب y پیدا کرده و y را با x و x را با $f^{-۱}(x)$ جایگزین کنیم. همچنین برای دامنه و برد تابع وارون از روابط $R_{f^{-۱}} = D_f$ و $D_{f^{-۱}} = R_f$ بهره می‌بریم.

$$f(x) = \frac{-۱}{۲}x + ۳ \rightarrow y = \frac{-۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{-۳} y - ۳ = \frac{-۱}{۲}x \xrightarrow{\times(-۲)} -۲y + ۶ = x$$
$$\xrightarrow{\text{حالا}} f^{-۱}(x) = -۲x + ۶$$

و اما با توجه به خطی بودن تابع می‌توان نوشت:

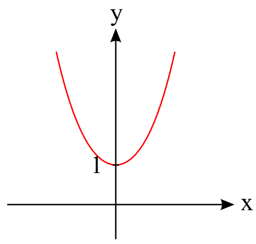
$$D_f = \mathbb{R} = R_{f^{-۱}}\quad ,\quad R_f = \mathbb{R} = D_{f^{-۱}}$$

ب

$$g(x) = ۱ + \sqrt{x-۲} \rightarrow y = ۱ + \sqrt{x-۲} \xrightarrow{-۱} y - ۱ = \sqrt{x-۲} \xrightarrow[(x\geq ۲)]{\text{به توان ۲}} (y-۱)^۲ = x - ۲$$
$$\rightarrow x = (y-۱)^۲ + ۲ \longrightarrow f^{-۱}(x) = (x-۱)^۲ + ۲$$
$$\begin{cases} D_f \text{ برای } : x - ۲ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۲ \rightarrow D_f = [۲,+\infty) = R_{f^{-۱}} \\ R_f \text{ برای } : y = ۱ + \underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\min = ۰} \rightarrow \min(y) = ۱ + ۰ = ۱ \rightarrow y \geq ۱ \rightarrow R_f = [۱,+\infty) = D_{f^{-۱}} \end{cases}$$

پ

تابع $h(x) = x^{۲} + ۱$ که معرف یک سهمی به شکل



است، به دلیل یک به یک نبودن روی دامنهٔ خود $(D_h = \mathbb{R})$ وارون‌پذیر نخواهد بود.

پرسش: آیا راهی است که تابع $h(x) = x^{۲} + ۱$ را تبدیل به یک تابع وارون پذیر کند؟!

پاسخ: آری. با توجه به نمودار فوق اگر چناچه دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ یا $(-\infty, ۰]$ محدود کنیم تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌شود. مثلاً:

$$h(x) = x^{۲} + ۱ \ , \ D_h = [۰, +\infty) \to y = x^{۲} + ۱ \xrightarrow{-۱} x^{۲} = y - ۱ \xrightarrow[y \geq ۱]{\text{جذر بگیر}} x = \sqrt{y - ۱}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} h^{-۱}(x) = \sqrt{x - ۱} \ ; \ D_{h^{-۱}} = [۱, +\infty) = R_h \ , \ R_{h^{-۱}} = D_h = [۰, +\infty)$$

۳۰ مرکز دایره و بیضی $x^{۲} + y^{۲} + ۲x = ۸ \Rightarrow O(-۱, ۰)$

طول قطر دایره: $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^{۲} + ۰^{۲} - ۴(-۸)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶} \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow ۲R = ۶$

قطر بزرگ بیضی $AA' = ۶ + ۲ = ۸ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$

قطر کوچک بیضی $BB' = ۶ - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$

فاصلهٔ کانونی بیضی: $FF' = ۲c = ۴\sqrt{۳} \Leftarrow c^{۲} = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳}$ ؛ از طرفی: $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow ۱۶ = ۴ + c^{۲} \Rightarrow c^{۲} = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۳}$

از آن‌جا که بیضی افقی است داریم:

$$A\left|\begin{matrix}\alpha + a \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۱ + ۴ \\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۳ \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$A'\left|\begin{matrix}\alpha - a \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-۱ - ۴ \\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۵ \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$F\left|\begin{matrix}\alpha + c \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}-۱ + ۲\sqrt{۳} \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$F'\left|\begin{matrix}\alpha - c \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}-۱ - ۲\sqrt{۳} \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$B\left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta + b\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱ \\ ۲\end{matrix}\right.$$

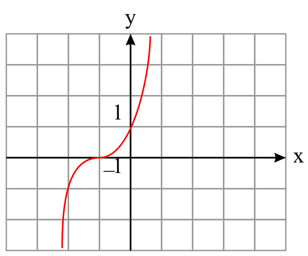
$$B'\left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta - b\end{matrix}\right. \Rightarrow B'\left|\begin{matrix}-۱ \\ -۲\end{matrix}\right.$$

خروج از مرکز بیضی: $e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۱

برای رسم نمودار تابع ابتدا نمودار $y = x^{۳}$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

تابع اکیداً صعودی است.



۳۲

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+1-x)}{(x+1)}=1+1+1=3$$

۳۳

ابتدا تمام جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$4x^2+4y^2-4x+8y=10\Rightarrow x^2+y^2-x+2y=\frac{5}{2}$$

$$\to x^2-x+y^2+2y=\frac{5}{2}\to (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+1)^2-1=\frac{5}{2}$$

$$\to (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{15}{4}\to C\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.\ ,\ R=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

۳۴

توجه کنید که $AF=a-c$ و $OB=b$ و $OA'=a$ است.

$$S_{\overset{\triangle}{A'OB}}=3S_{\overset{\triangle}{BAF}}\to \frac{1}{2}OB\cdot OA'=3\times\frac{1}{2}OB\cdot AF$$

$$\to OA'=3AF\to a=3(a-c)\to a=3a-3c\to 2a=3c\to a=\frac{3}{2}c$$

$$e=\frac{c}{a}\to e=\frac{c}{\frac{3}{2}c}\to e=\frac{2}{3}$$

$$\text{طول قطر کوچک}=4\to 2b=4\to b=2$$

$$c^2=a^2-b^2\to c^2=\frac{9}{4}c^2-4\to 4=\frac{5}{4}c^2\to 5c^2=16$$

$$\to c^2=\frac{16}{5}\to c=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\xrightarrow{a=\frac{3}{2}c} a=\frac{3}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\to \text{قطر بزرگ}=2a=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

۳۵

$\frac{1}{2}$ ظرف 1: [4 قرمز، 2 آبی] → دو توپ همرنگ نباشد $=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{8}{15}$

$\frac{1}{2}$ ظرف 2: [5 قرمز، 4 آبی] → دو توپ همرنگ نباشد $=\dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

$$P(\text{دو توپ همرنگ نباشند})=\frac{1}{2}\times(\frac{8}{15}+\frac{5}{9})=\frac{1}{2}\times(\frac{24+25}{45})=\frac{49}{90}$$

۳۶

$\frac{1}{3}$ ظرف اول: [5 قرمز، 11 آبی] → احتمال آبی بودن $=\dfrac{11}{16}$

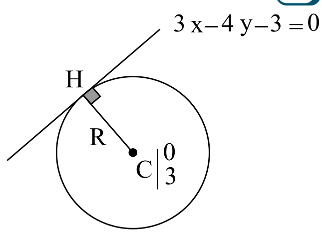
$\frac{1}{3}$ ظرف دوم: [3 قرمز، 9 آبی] → احتمال آبی بودن $=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$

$\frac{1}{3}$ ظرف سوم: [فقط آبی] → احتمال آبی بودن $=1$

$$P(\text{آبی بودن})=\frac{1}{3}\times\frac{11}{16}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{11}{48}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{11+12+16}{48}=\frac{39}{48}$$

۳۷ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر شعاع دایره است.

$$R = CH = \frac{|0-12-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$



پس: $\begin{cases} C\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right. \\ R=3\end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2} x^2+(y-3)^2=9$

۳۸

$$x^2+2x+y^2+2y-8=0 \to (x+1)^2-1+(y+1)^2-1-8=0$$

$$\to (x+1)^2+(y+1)^2=10 \to \begin{cases} C\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right. \\ R=\sqrt{10}\end{cases}$$

۳۹

$f(x)=-x^2+6x-2 \quad , x\in[-2,5]$

$f'(x)=-2x+6=0 \Rightarrow x=3$ طول نقطهٔ بحرانی

$x=-2 \to f(-2)=-4-12-2=-18$

$x=3 \to f(3)=-9+18-2=7$

$x=5 \to f(5)=-25+30-2=3$

$\min$ مطلق $=-18$ ، $\max$ مطلق $=7$

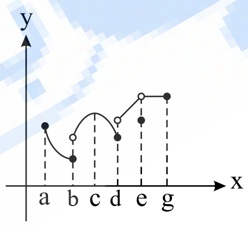
۴۰

در $x=b$ مینیمم نسبی و مینیمم مطلق دارد.

در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

در $x=d$ مینیمم نسبی دارد.

در $x=e$ مینیمم نسبی دارد.



در کل بازهٔ (e,g) ماکزیمم مطلق، هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی دارد.

در $x=g$ ماکزیمم مطلق دارد.

۴۱

الف) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\ 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow x=0 \to f(0)=1$$

x	-1		0		1
$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

نقطهٔ $(0,1)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.

ب) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}, 2x-x^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 2 \Rightarrow D_f=[0,2]$

$$f'(x)=\frac{۲-۲x}{۲\sqrt{۲x-x^۲}}=\frac{۱-x}{\sqrt{۲x-x^۲}}=۰\Rightarrow ۱-x=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow f(۱)=۱$$

x	۰		۱		۲
$f'(x)=\frac{۱-x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$		+	۰	−	
$f(x)$	۰	↗	۱	↘	۰

نقطهٔ $(۱,۱)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.

۴۲

$f(x)=\frac{-۱}{x^۲+۴}$, $x^۲+۴=۰$ ریشه ندارد. $\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f'(x)=\frac{۰-۲x\times(-۱)}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{۲x}{(x^۲+۴)^۲}\ ,\ ۲x=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow f(۰)=\frac{-۱}{۴}$$

علامت مشتق فقط به صورت آن بستگی دارد.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)=\frac{۲x}{(x^۲+۴)^۲}$		−	۰	+	
$f(x)$	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰

تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۴۳

الف) $f(x)=-۵x+۲\ ,\ D_f=\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=-۵<۰$

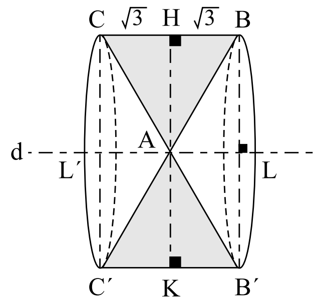
چون مشتق همواره منفی است پس تابع در کل $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی می‌باشد.

ب) $f(x)=\sqrt{x-۳}\ ,\ D_f=[۳,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}>۰$$

چون مشتق در بازهٔ $(۳,+\infty)$ همواره مثبت است، پس تابع در دامنه‌اش یعنی $D_f=[۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۴۴ حجم حاصل استوانه‌ای خالی از دو مخروط می‌باشد.



$$AH=\sin ۶۰^\circ\times AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sqrt{۳}=۳$$

$$\Rightarrow BL=B'L=CL=C'L'=۳$$

$$V=V_{\text{استوانه}}-۲\times V_{\text{مخروط}}$$

$$V=\pi\times ۳^۲\times ۲\sqrt{۳}-۲\times\frac{۱}{۳}\pi\times ۳^۲\times\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}\pi-۶\sqrt{۳}\pi$$

$$\Rightarrow V=۱۲\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر با $\pi r^۲h$ است و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$

۴۵ یک روش برای یافتن دامنهٔ تابع ترکیب fog استفاده از رابطهٔ $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$ است. برای استفاده از این روش ابتدا باید دامنهٔ توابع f و g را به‌دست آوریم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f:۱-۲x\geq ۰\rightarrow ۲x\leq ۱\rightarrow x\leq\frac{۱}{۲}\rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۱}{۲}] \\ g:x+۲\neq ۰\rightarrow x\neq -۲\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-۲\}|\frac{۱-۳x}{x+۲}\leq\frac{۱}{۲}\}=?$$

حالا در این مرحله مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{۲}\geq\frac{۱-۳x}{x+۲}$ را یافته و اشتراک آن با $\mathbb{R}-\{-۲\}$ را به‌عنوان دامنهٔ fog معرفی می‌کنیم. داریم:

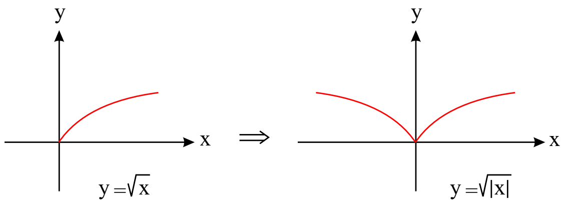
$$\frac{۱-۳x}{x+۲}-\frac{۱}{۲}\le ۰ \to \frac{۲-۶x-x-۲}{۲x+۴}\le ۰ \to \frac{-۷x}{۲x+۴}\le ۰$$

x		-۲		۰	
$\frac{-۷x}{۲x+۴}$	$-$	ت.ن	$+$		$-$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= x \ge ۰ \ ,\ x < -۲$

$$\xrightarrow[\mathbb{R}-\{-۲\}]{\text{اشتراک با}} D_{fog}=(-\infty,-۲)\cup[۰,+\infty)$$

۴۶ برای رسم نمودار $y=f(|x|)$ از روی نمودار $y=f(x)$ کافی است آن قسمت از نمودار f که در xهای منفی قرار دارد را حذف کرده و قرینهٔ قسمت باقی‌مانده نسبت به محور yها را به‌جای آن قرار دهیم. در این‌جا، نمودار $y=\sqrt{x}$ برای xهای منفی تعریف نمی‌شود و لذا تنها کافی است که قرینهٔ خود نمودار نسبت به محور yها را به‌خود نمودار اضافه کنیم؛ داریم:

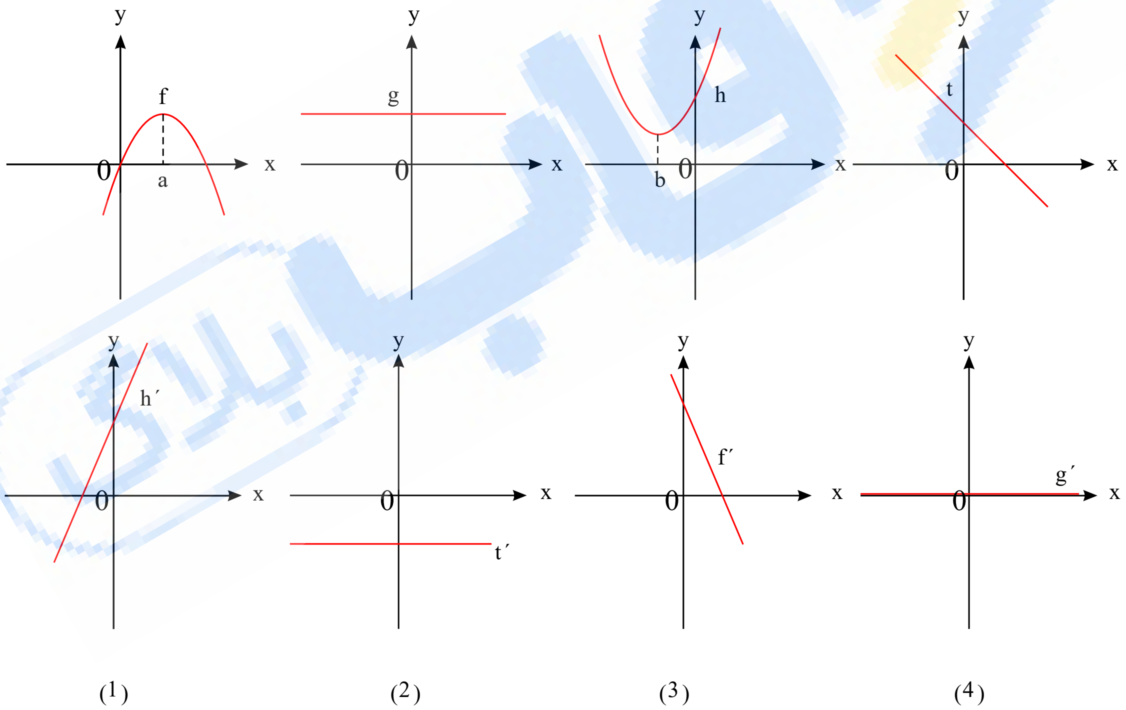


۴۷

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳\times۳+۲\times۵=۱۹$$

۴۸



در تابع f برای $(-\infty,a)$ شیب خط مماس یعنی مشتق مثبت است و برای $(a,+\infty)$ شیب خط مماس یعنی مشتق منفی است، پس نمودار f' نمودار شمارهٔ (۳) است.

تابع g تابع ثابت است و مشتق آن در تمام نقاط صفر است، پس نمودار g' نمودار شمارهٔ (۴) است. در تابع h برای $(-\infty,b)$ شیب خط مماس یعنی مشتق منفی است و برای $(b,+\infty)$ شیب خط مماس یعنی مشتق مثبت است، پس نمودار h' نمودار شمارهٔ (۱) است.

تابع t تابعی خطی با شیب منفی است، پس مشتق آن در تمام نقاط یک عدد ثابت منفی است. پس نمودار (t') نمودار شمارهٔ (۲) است.

۴۹

الف) صعودی $\Leftarrow (-\infty,۰]$ ، اکیداً صعودی $\Leftarrow (-\infty,-۳]$

صعودی $\Leftarrow \mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی $\Leftarrow [۰,+\infty)$ ، صعودی $\Leftarrow [-۳,+\infty)$

ب) اکیداً نزولی $\Leftarrow [-۲,۰]$ ، نزولی $\Leftarrow [۰,\infty)$

پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۵۰ الف)

برای محاسبهٔ $(fog)^{-۱}(۵)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای xهای آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ

$(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$، تابع مرکب $g^{-۱}of^{-۱}$ را محاسبه کرده و به‌جای xهایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^۳ \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to fog(x)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبهٔ } (fog)^{-۱}} y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳=y+۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳=۸y+۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم بگیر.}} x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴} \to (fog)^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \to y=\frac{۱}{۸}x-۳ \to \frac{۱}{۸}x=y+۳ \to x=۸y+۲۴ \to f^{-۱}(x)=۸x+۲۴ \\ g(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{y} \to g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(۸x+۲۴)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

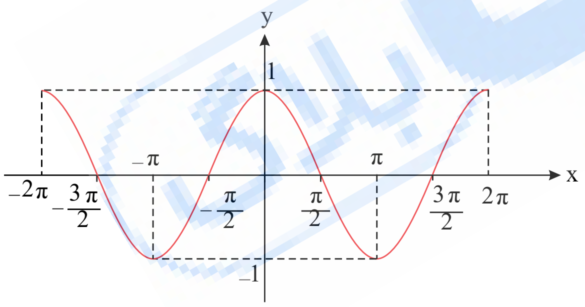
حال، با توجه به ضابطه‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)=f^{-۱}(f^{-۱}(۶)) \xrightarrow[f^{-۱}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} f^{-۱}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵)) \xrightarrow[f^{-۱}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

۵۱ ابتدا به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x) \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را -۲ برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-۱}{۲}$ برابرمی‌کنیم.

ب) $y=۲\cos ۲x \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم.

پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x) \to$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

ت) $y=-\cos ۲x \to$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم.

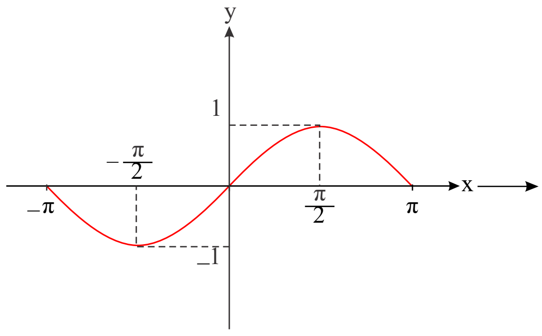
۵۲

در هر مورد، تابع مرکب را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم حاصل کدام برابر $h(x)$ می‌شود.

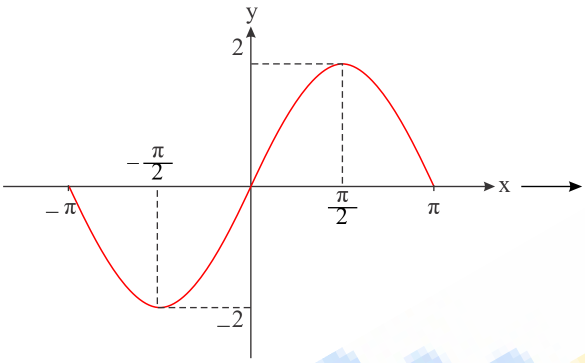
الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt[۵]{x} \\ g(x)=۳x^۲-۴x+۱ \end{cases} \to \begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(۳x^۲-۴x+۱)=\sqrt[۵]{۳x^۲-۴x+۱}\neq h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt[۵]{x})=۳\sqrt[۵]{x^۲}-۴\sqrt[۵]{x}+۱\neq h(x) \end{cases}$

$$ب) \begin{cases} k(x)=x^5 \\ l(x)=3x^2-4x+1 \end{cases} \to \begin{cases} kol(x)=k(l(x))=k(3x^2-4x+1)=(3x^2-4x+1)^5=h(x) \\ lok(x)=l(k(x))=l(x^5)=3x^{10}-4x^5+1 \neq h(x) \end{cases}$$

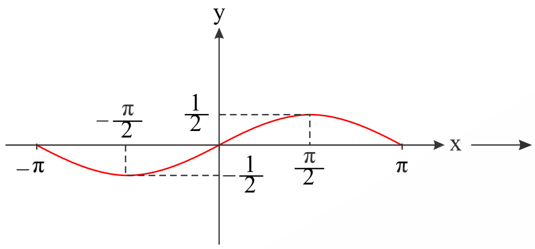
۵۳) هر چهار نمودار $y=\sin x$، $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایهٔ $y=\sin x$، که فاصلهٔ بستهٔ $[-1,1]$ است، برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>0$ به صورت $[-r,r]$ و برای $r<0$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r|>1$ کشیده‌تر و برای $0<|r|<1$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای rهای منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y=|r|\sin x$ نسبت به محور xها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:



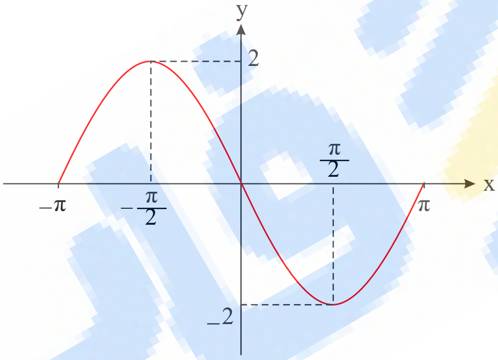
y=sin x



y=2 sin x

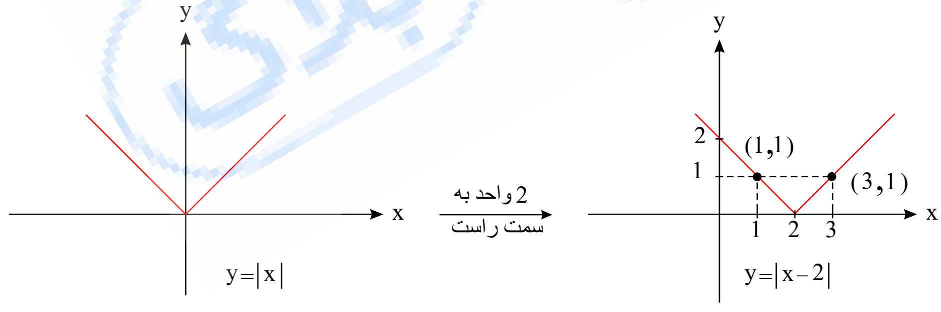


y=$\frac{1}{2}$ sin x

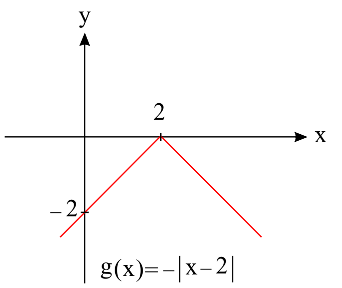


y=−2 sin x

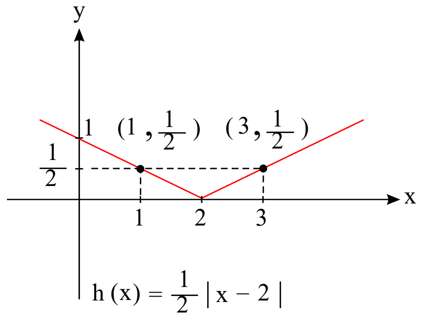
۵۴) ابتدا نمودار تابع $y=|x-2|$ را به کمک انتقال نمودار نام‌آشنای $y=|x|$ رسم می‌کنیم:

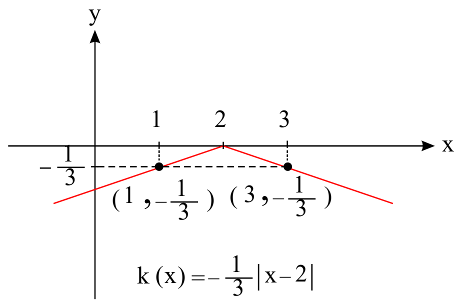


حالا برای رسم $y=-|x-2|$، نمودار $y=|x-2|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



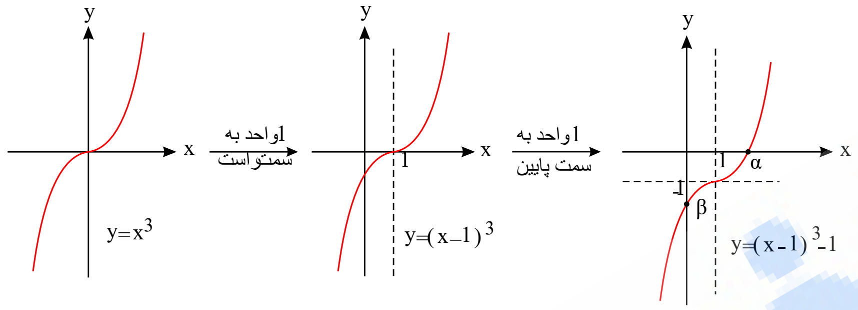
و برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}|x-2|$، می‌بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y=|x-2|$ را (با ثابت ماندن طول) نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن‌ها در $\frac{-1}{3}$ ضرب کنیم به نمودار $y=\frac{-1}{3}|x-2|$ می‌رسیم:



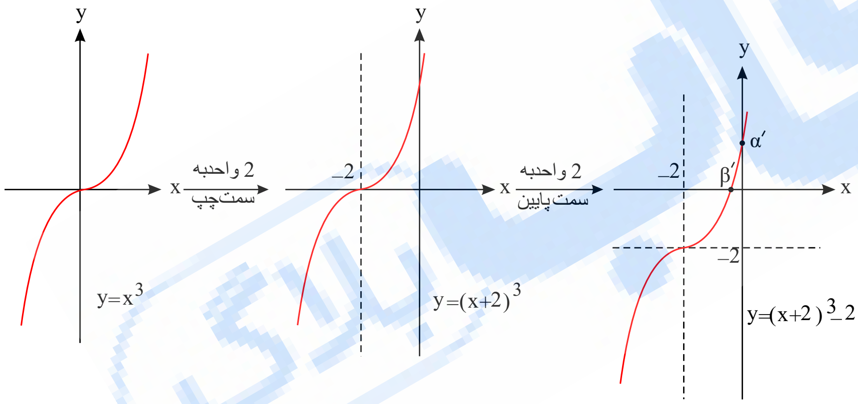


۵۵ هر دو نمودار را با توجه به نمودار تابع $y=x^{۳}$ (به عنوان پایه) و به کمک انتقال نمودارها رسم کرده و دامنه و برد هرکدام را مشخص می‌کنیم:

الف)



ب)



این نمودارها به ما می‌گویند که دامنه و برد هر دو تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است چرا که تصویر نمودار روی محور xها و yها تمام محورها را پوشش می‌دهد.

و اما برای یافتن محل تلاقی نمودارها با محورهای مختصات اینگونه عمل می‌کنیم:

$$\text{الف}\begin{cases} x=۰ \rightarrow y=(۰-۱)^{۳}-۱=-۲=\beta \\ y=۰ \rightarrow (x-۱)^{۳}-۱=۰ \rightarrow (x-۱)^{۳}=۱ \rightarrow x-۱=۱ \rightarrow x=۲=\alpha \end{cases}$$

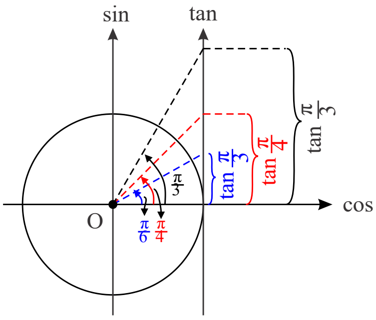
$$\text{ب}\begin{cases} x=۰ \rightarrow y=(۰+۲)^{۳}-۲=۸-۲=۶=\alpha' \\ y=۰ \rightarrow (x+۲)^{۳}-۲=۰ \rightarrow (x+۲)^{۳}=۲ \\ \rightarrow x+۲=\sqrt[۳]{۲} \rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}-۲=\beta' \end{cases}$$

۵۶

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x^{۶}}{-۳x^{۵}}=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{۵}{۳}x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۵}{۳}x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵}{۳}x=+\infty\end{cases}$$

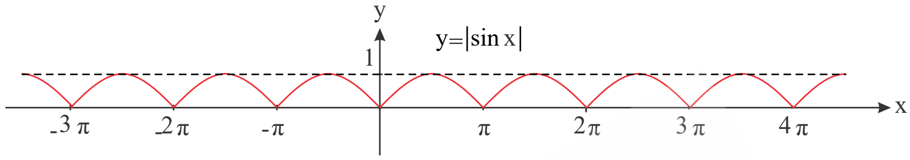
۵۷

افزایش



۵۸ الف) با رسم $y=\sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

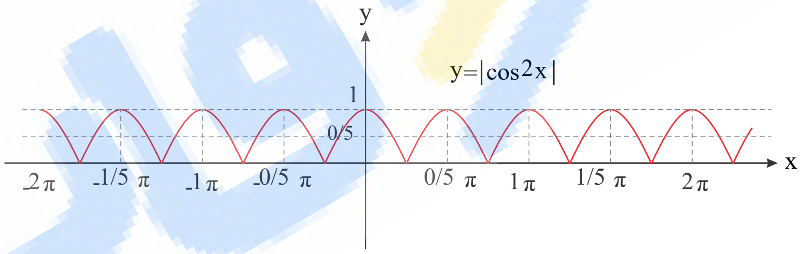
$$\begin{cases} T=\pi \\ \max = ۱ \\ \min = ۰ \end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده $(\cos ۲x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos ۲x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x=۰,\ \frac{\pi}{۲},\ \pi,\ \frac{۳\pi}{۲},\ ۲\pi,\ \cdots \rightarrow y=۱ \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases} T=\frac{\pi}{۲} \\ \max = ۱ \\ \min = ۰ \end{cases}$$



۵۹ تابع f در کل $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

$$f(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}-۲$$

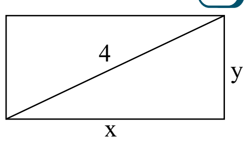
$$f'(x)=-۳x^{۲}+۱۲x=۰ \Rightarrow -۳x(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=-۲\ ,\ x=۴ \Rightarrow f(۴)=-۶۴+۹۶-۲=۳۰$$

x	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$f'(x)=-۳x^{۲}+۱۲x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
		$\searrow$	-۲	$\nearrow$	۳۰	$\searrow$	

نقطهٔ $(۰,-۲)$ مینیمم نسبی و نقطهٔ $(۴,۳۰)$ ماکزیمم نسبی است.

۶۰



$$x^{۲}+y^{۲}=۴^{۲} \Rightarrow y^{۲}=۱۶-x^{۲} \Rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^{۲}}$$

$$y^{۲}\geq ۰ \Rightarrow ۱۶-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۱۶ \Rightarrow -۴\leq x\leq ۴$$

$$x\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۴$$

محیط $=P=۲(x+y)=۲x+۲\sqrt{۱۶-x^{۲}}\quad ,\quad ۰\leq x\leq ۴$

$$P'=۲+۲\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۶-x^{۲}}}=۲-\frac{۲x}{\sqrt{۱۶-x^{۲}}}=\frac{۲\sqrt{۱۶-x^{۲}}-۲x}{\sqrt{۱۶-x^{۲}}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۶-x^۲}-۲x=۰\Rightarrow\sqrt{۱۶-x^۲}=x\Rightarrow ۱۶-x^۲=x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲=۱۶\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$$

$$x=۰\Rightarrow P=۰+۸=۸\quad,\quad x=۴\Rightarrow P=۸+۰=۸$$

$$x=۲\sqrt{۲}\Rightarrow P=۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۶-۸}=۴\sqrt{۲}+۲\times ۲\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$$

$$P_{\max}=۸\sqrt{۲}$$

۶۱

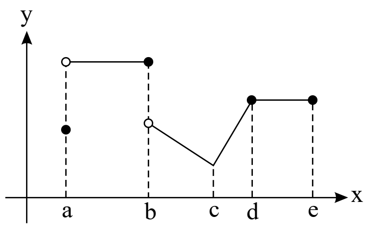
کل بازهٔ (a,b) ماکزیمم مطلق، ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است.

$x=b$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

$x=c$ نقطهٔ مینیمم نسبی و مطلق است.

$x=d$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

کل بازهٔ (d,e) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.



۶۲ باید نامعادلهٔ $f(x)<-۱۰۰۰۰$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x)<-۱۰۰۰۰\Rightarrow\frac{۱}{x+۵}<-۱۰۰۰۰\xrightarrow[x+۵<۰]{x<-۵}x+۵>-\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow x>-۵-۰٫۰۰۰۱\Rightarrow x>-۵٫۰۰۰۱,x<-۵\Rightarrow -۵٫۰۰۰۱<x<-۵$$

۶۳

$$f(x)=(x^۲-۴)[x+۱]\,,f(۲)=۰$$
$$f'(۲)=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x+۲)[x+۱]-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲}(x+۲)[x+۱]$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}(x+۲)[x+۱]=۴\left[۳^-\right]=۴\times۲=۸$$
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}(x+۲)[x+۱]=۴\left[۳^+\right]=۴\times۳=۱۲$$
$$f'_-(۲)+f'+(۲)=۸+۱۲=۲۰$$

۶۴

$$f(x)=(۱-x)[x]-|x-۱|\quad f(۱)=۰$$
$$f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(۱-x)[x]-|x-۱|-۰}{x-۱}$$
$$f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}\frac{(۱-x)[x]-(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{(۱-x)\times۰+|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{x-۱}{x-۱}=۱$$
$$f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}\frac{(۱-x)[x]-|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(۱-x)\times۱-|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱-x-x+۱}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱^+}=\frac{۲-۲x}{x-۱}f'_+=-۲\to(۱)+f'_-(۱)=-۲+۱=-۱$$

۶۵

$$f(x)=\sqrt{|x+۲|},f(-۲)=۰$$
$$f'(-۲)=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to-۲}\frac{\sqrt{|x+۲|}-۰}{x+۲}\times\frac{\sqrt{|x+۲|}}{\sqrt{|x+۲|}}$$
$$=\lim_{x\to-۲}\frac{|x+۲|}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}$$
$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-(x+۲)}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$
$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۶۶

$f(x) = x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x$

$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$(gof)'(۰) = f'(۰)g'(f(۰)) = ۰ \times g'(۱) = ۰ \times \frac{۱}{۲} = ۰$

۶۷

$f(x) = g(x^۲ + x) \Rightarrow f'(x) = (۲x + ۱) \cdot g'(x^۲ + x)$

$x = ۲ \Rightarrow f'(۲) = ۵g'(۶) \Rightarrow ۵ = ۵g'(۶) \Rightarrow g'(۶) = ۱$

۶۸

$f(x) = x\sqrt{x - ۳} \Rightarrow f(۴) = ۴$

$f'(x) = \sqrt{x - ۳} + \frac{۱}{۲\sqrt{x - ۳}} \times x = \sqrt{x - ۳} + \frac{x}{۲\sqrt{x - ۳}}$

$f'(۴) = ۱ + \frac{۴}{۲} = ۳ \Rightarrow$ شیب خط مماس $= ۳$

$m = ۳ \ , \quad A(۴, ۴) \rightarrow y - ۴ = ۳(x - ۴) \Rightarrow y = ۳x - ۸$

۶۹ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \underset{x \to \pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^n + mx^۳ + x^۲ - ۱}{۴x^۳ + x^۲ - ۳} = -۲$$

حالت ۱) $n < ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{mx^۳}{۴x^۳} = \frac{m}{۴} = -۲ \Rightarrow m = -۸ \Rightarrow n < ۳ \ , \ m = -۸$ جواب

حالت ۲) $n = ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۳ + mx^۳}{۴x^۳} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(۲ + m)\, x^۳}{۴x^۳} = \frac{۲ + m}{۴} = -۲$

$\Rightarrow ۲ + m = -۸ \Rightarrow m = -۱۰ \Rightarrow n = ۳ \ , \ m = -۱۰$ جواب

حالت ۳) $n > ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^n}{۴x^۳} = \pm\infty \rightarrow$ غیرقابل‌قبول

۷۰

$\lim\limits_{x \to -\infty} mx^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ - ۷x = \lim\limits_{x \to -\infty} ((m + ۱)x^۲ - ۳x + ۴) = +\infty$

حالت ۱) $m = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (-۳x + ۴) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-۳x) = -۳\,(-\infty) = +\infty$ قابل قبول است.

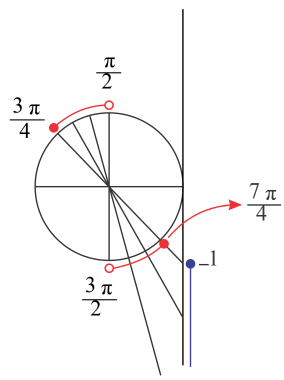
حالت ۲) $m \neq -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} ((m + ۱)x^۲ - ۳x + ۴) = \lim\limits_{x \to -\infty} (m + ۱)\, x^۲ = (m + ۱)\,(-\infty)^۲$

$\Rightarrow (m + ۱)\,(+\infty) = +\infty \Rightarrow m + ۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱$

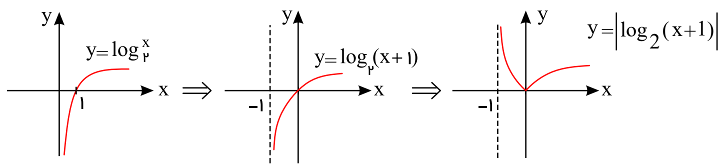
در کل باید $m \geq -۱$ باشد.

۷۱ **در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها کوچک‌تر یا مساوی -۱ است.**

$\tan\alpha \leq -۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \alpha \leq \frac{۳\pi}{۴}$ یا $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha \leq \frac{۷\pi}{۴}$



۷۲



$(-1,0] \to$ **اکیداً نزولی** ، $[0,+\infty) \to$ **اکیداً صعودی**

۷۳

$$f(x)=x^2 \xrightarrow{x\to x+4} y=(x+4)^2 \xrightarrow{x\to 3x} y=(3x+4)^2$$
$$\xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} y=-(3x+4)^2 \xrightarrow[\text{ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی با}} y=-2(3x+4)^2 \xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y=-2(3x+4)^2+5$$

برای رسم g از روی f باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱ $-$ f را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم.

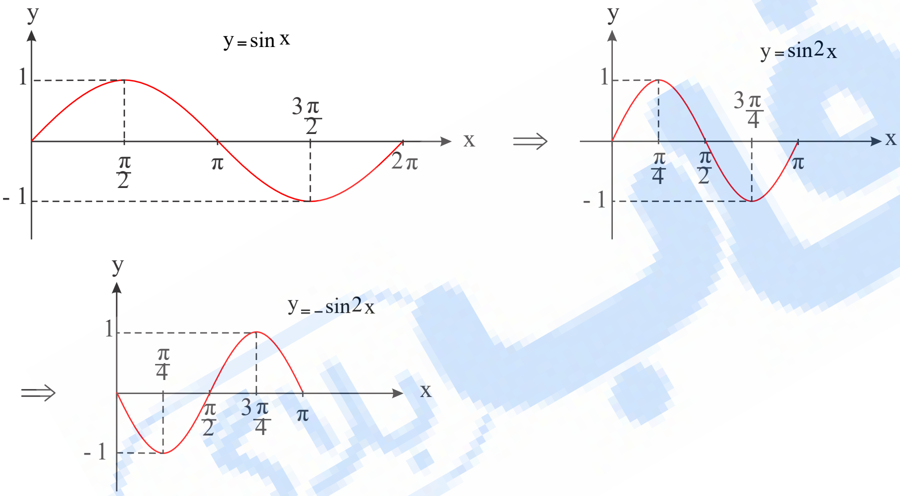
۲ $-$ در نمودار حاصل طول نقاط را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

۳ $-$ سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

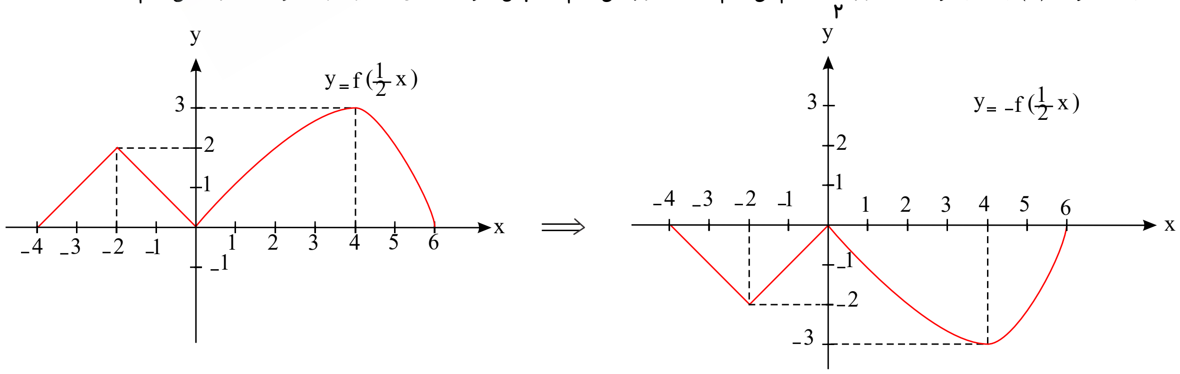
۴ $-$ نمودار حاصل را در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم.

۵ $-$ در نهایت نمودار حاصل را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

۷۴ **برای رسم $y=-\sin 2x$، در نمودار $y=\sin x$ ابتدا طول نقاط را بر ۲ تقسیم کرده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.**

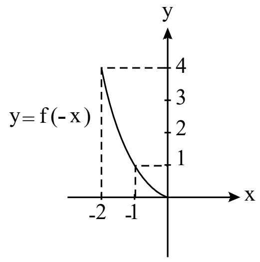


۷۵ **برای رسم $y=-f(\frac{1}{2}x)$، در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم (در ۲ ضرب می‌کنیم) و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.**

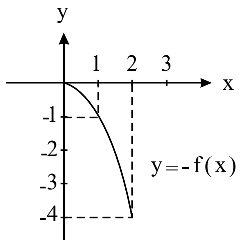


۷۶

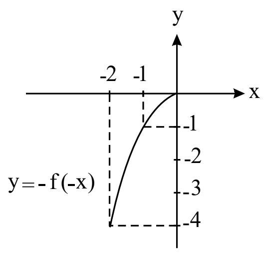
الف برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.



ب برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



پ برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم که نتیجهٔ آن این است که نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.



۷۷

الف با فرض $f(x)=\sqrt{۳+x^۲}$ و $g(x)=x^۲$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۳+x^۲}=\sqrt{۳}>۰\\ \lim\limits_{x\to ۰} g(x)=\lim\limits_{x\to ۰} x^۲=۰\ ,\ \ g(x)=x^۲\geq ۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۰^+}=+\infty$$

ب با فرض $f(x)=۱$ و $g(x)=(x-۲)^۴$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}۱=۱>۰\\ \lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۴=۰\ ,\ \ g(x)=(x-۲)^۴\geq ۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x-۲)^۴}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

پ با فرض $f(x)=|۵-x|$ و $g(x)=|۲+x|$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=\lim\limits_{x\to -۲}|۵-x|=|۵-(-۲)|=۷\\ \lim\limits_{x\to -۲} g(x)=\lim\limits_{x\to -۲}|۲+x|=۰\ ,\ \ g(x)=|۲+x|\geq ۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to -۲}\frac{|۵-x|}{|۲+x|}$$

$$=\frac{۷}{۰^+}=+\infty$$

۷۸

الف

$$f(x)=(۴x-۱)(x^۲-۵)^۳\Rightarrow f'(x)=۴(x^۲-۵)^۳+۳\times ۲x(x^۲-۵)^۲(۴x-۱)$$

ب

$$y=\sqrt[۵]{(x^۳-۹x)^۲}\Rightarrow y'=\frac{۲(۳x^۲-۹)}{۵\sqrt[۵]{(x^۳-۹x)^۳}}$$

پ

$$f(x) = ۳x^۲\sqrt{۵x^۲-۶} \Rightarrow f'(x) = ۶x\sqrt{۵x^۲-۶} + \frac{۱۰x}{۲\sqrt{۵x^۲-۶}} \times ۳x^۲$$

ت

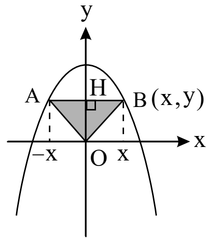
$$y = \frac{(x^۲-۱)^۳}{x^۳+۲x} \Rightarrow y' = \frac{۳ \times ۲x(x^۲-۱)^۲(x^۳+۲x) - (۳x^۲+۲)(x^۲-۱)^۳}{(x^۳+۲x)^۲}$$

۷۹ درست

۸۰

$$f'(t) = -۴t + ۱۰ \Rightarrow f'(۲) = -۸ + ۱۰ = ۲$$

۸۱



$$S_{O\overset{\Delta}{A}B} = \frac{OH \times AB}{۲} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \begin{cases} AB = ۲x \\ OH = y \end{cases} \Rightarrow S = \frac{y \times ۲x}{۲} = xy \Rightarrow S = x(۲۷ - x^۲) \Rightarrow S = ۲۷x - x^۳ \Rightarrow S' = ۲۷ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۲۷ \Rightarrow x^۲ = ۹$$
$$\Rightarrow x = ۳$$

$$S_{max} = ۲۷ \times ۳ - ۳^۳ = ۳ \times ۲۷ - ۲۷ = ۲ \times ۲۷ = ۵۴$$

۸۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O\overset{\Delta}{N}H$ داریم:

$$\tan x = \frac{NH}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

از طرفی چون زاویهٔ $N\widehat{A'}A$ محاطی است پس برابر نصف کمان روبه‌رو است یعنی نصف کمان $\widehat{AN}$ یا همان $\widehat{x}$ است لذا: $\widehat{A'} = \frac{\hat{x}}{۲}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'\overset{\Delta}{N}H$ داریم:

$$\tan A' = \frac{NH}{A'H} \Rightarrow \tan\frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$$
$$(A'O = ۱, OH = \cos x)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\tan ۲۲/۵^\circ = \frac{\sin ۴۵^\circ}{۱ + \cos ۴۵^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow ۲۲/۵^\circ = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}}{\frac{۲+\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}$$

$$\text{گویا می‌کنیم} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}} \times \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}} \Rightarrow \tan ۲۲/۵^\circ = \frac{۲\sqrt{۲}-۲}{\underset{۲}{\cancel{۴-۲}}} = \sqrt{۲} - ۱$$

۸۳

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

می‌دانیم: اگر دو زاویه، متمم یکدیگر باشند سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است لذا داریم:

$$\frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۶\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{۵\pi}{۱۲} = \sin\frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \sin\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{۲}{۴} - \sin^۲\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۲} - \sin^۲\frac{\pi}{۱۲} \quad (۱)$$

از طرفی:

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos 2(\frac{\pi}{12})}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۸۴ باید معکوس هر کدام از ضابطهٔ را در محدودهٔ دامنهٔ خودشان پیدا کنیم:

$$y = 4x - x^2 - 3 \Rightarrow -y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \Rightarrow -y + 1 = (x-2)^2 \rightarrow \sqrt{1-y} = |x-2| \xrightarrow{x<2} \sqrt{1-y} = -x+2$$

$$x = 2 - \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = 2 - \sqrt{1-x}$$

$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = y = x + 2$$

پس ضابطهٔ تابع f^{-1} به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x} & , \quad x < 1 \\ x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

اما همین‌طور که می‌دانیم دامنهٔ f^{-1}، برد تابع اصلی است پس باید برد را بیابیم:

دامنه ضابطهٔ اول $\sqrt{1-y} = -x+2 \Rightarrow 1-y > 0 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow x < 1$: داشتیم

توجه کنید: از آن‌جا که در دامنهٔ تابع اصلی $x < 2$ است عبارت $\sqrt{1-y}$ نمی‌تواند برابر با صفر شود.

برای محاسبه برد ضابطهٔ دوم f، کافی است روی شرط دامنه‌اش، ضابطه را بسازیم.

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

۸۵

الف

مقدار افزایش جرم باکتری : $m(4) - m(3) = (\sqrt{4} + 4^2) - (\sqrt{3} + 3^2) = 9 - \sqrt{3}$

آهنگ رشد همان آهنگ شبیه لحظه‌ای است.

ب

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t$$

$$m'(9) = \frac{1}{2 \times 3} + 18 = \frac{109}{6}$$

۸۶

الف

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sin x} - \sqrt{2-\sin x}}{3x} \times \frac{\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x}}{\underbrace{\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x}}_{A}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} + \sin x - \cancel{2} + \sin x}{(3x)(A)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3A} = \frac{\cancel{2}}{3 \times \cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

ب

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + x - 1}{\sqrt{4x-4} + x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} + x - 1}{2\sqrt{x-1} + (x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\cancel{\sqrt{x-1}}\,(2 + \sqrt{x-1}(x+1))} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پ

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3 - [3^-]}{x-3}\sqrt{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3}|x-3| = \lim_{x\to 3^-} \cancel{\frac{-(x-3)}{x-3}} = -1$$

۸۷

الف درست

ب نادرست

پ نادرست (اگر صفحهٔ مفروض، در رأس بر محور سطح مخروطی عمود باشد، مقطع حاصل یک نقطه خواهد بود.)

ت درست

۸۸

الف درست - می‌دانیم $\cos(-x)=\cos x$، پس $f(-x)=f(x)$ یعنی این دو نمودار برهم منطبق هستند.

ب درست - همیشه تغییرات دامنه را برعکس انجام می‌دهیم.

۸۹

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۲^-} x-۲=۰$ و $|x-۲|$ همواره عددی نامنفی است داریم:

الف $\frac{۳}{۰^+}=+\infty$

۹۰

الف ۸

ب -۴

پ ۴

ت ۲