

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۱۴۰۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی (انسانی) دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱ در دنباله $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ چند جمله بزرگتر از $\frac{1}{300}$ وجود دارد؟

۲ در یک دنباله حسابی جمله اول -17 و جمله دهم برابر 10 است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

۳ با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{n+6}{3n-2}$ ، $b_n = n^2 - 1$ حاصل عبارت $a_7 + b_7$ را به دست آورید.

۴ با توجه به دنباله $u_n = n^2 - n$ حاصل موارد خواسته شده را بیابید.

الف) $u_4 - u_3$

ب) $u_5 + u_6$

۵ با حروف کلمه «شیراز» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

ج) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «ش» شروع و به «ز» ختم شود؟

۶ در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز وجود دارد به چند طریق می‌توان سه مهره از جعبه خارج کرد به طوری که:

الف) هر سه قرمز باشند. ب) هر سه هم رنگ باشند.

۷ هریک از عبارت‌های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{1}{5})^{\frac{3}{4}}$

ب) $\sqrt[5]{18}$

۸ با توجه به دنباله هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ حاصل عبارت $\frac{a_{10}}{a_7}$ را به دست آورید.

۹ مجموع بیست جمله اول دنباله $35, 31, 27, \dots$ را به دست آورید.

۱۰ درستی و نادرستی هر یک را مشخص کنید.

الف) طرح و برنامه‌ریزی، دومین گام برای یافتن داده‌ها است.

ب) با بزرگ‌تر شدن جامعه نیازی به تغییر اندازه نمونه نیست.

۱۱ یازدهمین جمله یک دنباله حسابی 52 و جمله نوزدهم آن 92 است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

۱۲ میانگین داده‌های $15, 25, 35, 45$ را به دست آورید.

۱۳ میانگین داده‌های $5 - 10 - 3 - 12 - 9 - 4 - 20$ را به دست آورید.

۱۴ در یک کارخانه سنگبری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 12500 گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور

میانگین 1875 گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

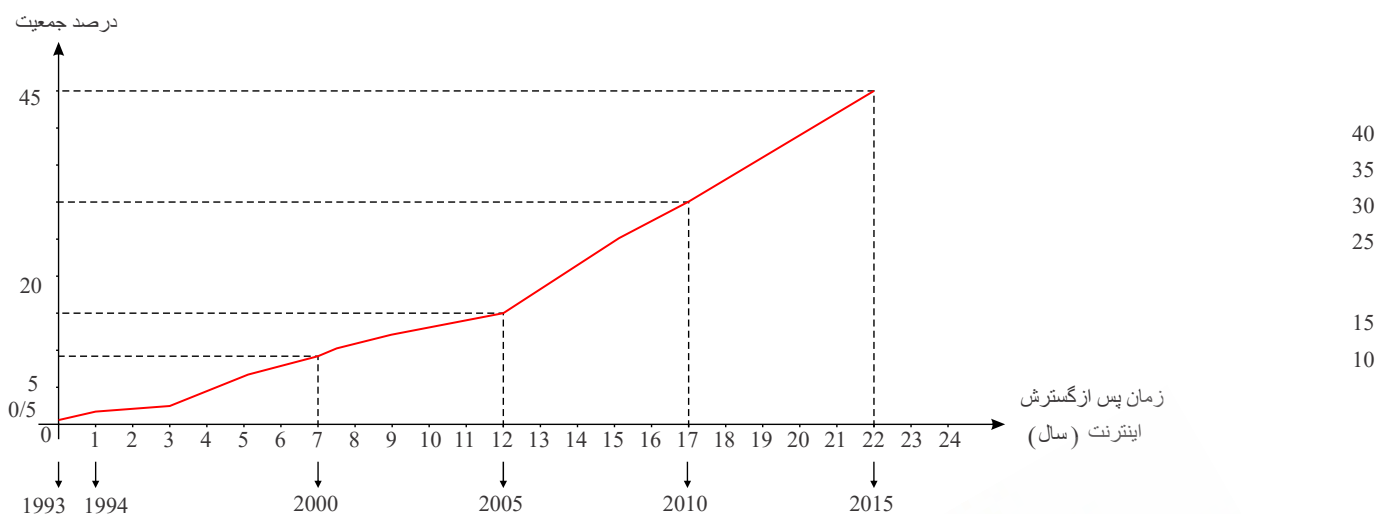
۱۵ با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_7$

ب) $c_7 - d_7$

ج) $b_7 + d_7$

۱۶ نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می دهد که از سال ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده اند:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(7)$ و $f(1)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۱۷) یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۸) هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۱۹) می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هر گاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۲۰) می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم، ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

۲۱) اگر از اختلاف مشترک یک دنباله حسابی ۱ واحد کم و به جمله اول آن ۳ واحد اضافه شود، مجموع ۲۰ جمله اول آن چه تغییری می‌کند؟

۲۲) در یک دنباله حسابی که دارای ۱۰۰ جمله است، مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر برابر ۳۰۰ است، حاصل جمع تمام جملات چند است؟

۲۳) معادله زیر را حل کنید و مقدار x را به دست آورید.

$$(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 31) = 400$$

۲۴) اگر مجموع n جمله اول دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

۲۵ اگر در یک دنباله حسابی $a_{n+1} = 3 + a_n$ باشد، اختلاف جملات پانزدهم و هفتم را بیابید.

۲۶ m را چنان بیابید که واسطه حسابی بین ریشه‌های معادله $2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$ باشد.

۲۷ جمله نهم یک دنباله حسابی ۴۲ و جمله بیستم آن ۷۵ است، جمله عمومی دنباله را بیابید.

۲۸ مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارات $3m - 1$ و $m + 5$ و $2m - 4$ جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند.

۲۹ نشان دهید دنباله $1, \frac{10}{7}, \frac{13}{7}, \dots$ یک دنباله حسابی است.

۳۰ حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$4 + (4 + 0,25) + (4 + 0,5) + \dots + (4 + 4)$$

۳۱ در دنباله حسابی زیر، مجموع جملات داده شده را بیابید.

$$5, 12, 19, \dots, 103$$

۳۲ در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 7n - 3$ جمله $(3n - 2)$ ام این دنباله را به دست آورید.

۳۳ با توجه به دنباله حسابی $4, 11, 18, 25, \dots$ جمله ۳۲ام این دنباله را به دست آورید.

۳۴ نمودار دنباله‌های زیر را به ازای $n \leq 6$ رسم کنید.

الف) $a_n = \frac{-n}{3} + 5$ ب) $b_n = 2n - 3$

۳۵ در دنباله $a_n = 3n - 5$ بدون نوشتن جملات دنباله، مقدار اختلاف مشترک و جمله اول را به دست آورید.

۳۶ پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی

شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی

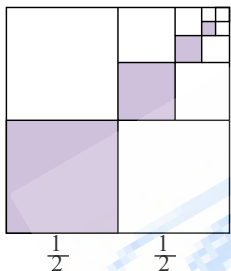
می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.

الف) چرا دنباله با مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست

می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟



۳۷ یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس

از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۳۸ نمودار تابع $f(x) = k^2 \times 3^x$ از نقطه $(2, 36)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = k^x$ باشد، $g(3)$ را به دست آورید. ($k > 0$ است).

۳۹ نقطه برخورد دو تابع $f(x) = (\frac{1}{4})^{x-1}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^{x+1}$ را به دست آورید.

۴۰ نمودار $f(x) = (\frac{1}{5})^{x-2} + 1$ را رسم کنید.

۴۱ در تابع نمایی $f(x) = (k - 2)x^2 + k^x$ مقدار $f(3)$ را بدست آورید.

۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ 3^x & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، $f(3) \cdot f(-2)$ را بدست آورید.

۴۳ حاصل $(\frac{21}{10})^3 \times (\frac{1}{10})^5 \times (2,1)^6$ را بدست آورید.

۴۴ ریشه سوم عدد $125 - 1$ را بدست آورید.

۴۵ ریشه دوم عدد ۲۵ را بدست آورید.

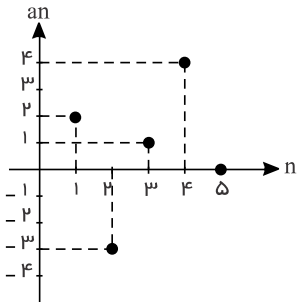
۴۶ حاصل عبارت $\sqrt[5]{(\sqrt{3} - 1)^5} - \sqrt[6]{(2 - 2\sqrt{3})^6}$ را بدست آورید.

۴۷ حاصل عبارت $A = 125^{\frac{1}{6}} \times 125^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{4}}$ را بدست آورید.

۴۸ ریشه سوم عدد $7^{\frac{3}{5}}$ را بدست آورید.

۴۹ ساده شده عبارت $\sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} - (\frac{1}{4})^{-0.25}$ را بدست آورید.

۵۰ با توجه به نمودار مقابل حاصل $a_2 + a_3 + a_4 - a_5$ را به دست آورید.

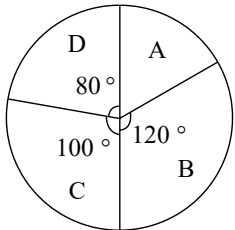


۵۱ جمله دهم دنباله $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ را بیابید.

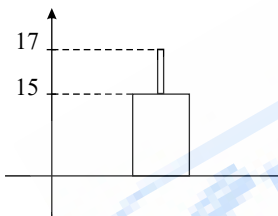
۵۲ با توجه به رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی $(a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n)$ جملات a_7 و a_6 این دنباله را بیابید.

۵۳ جمله $1 + 2n$ ام یک دنباله برحسب n به صورت $\frac{n+2}{2n-3}$ است، جمله ۱ ام را بیابید.

۵۴ با توجه به نمودار زیر اگر کل افراد ۳۰ نفر باشند چه تعداد از افراد در گروه A هستند؟



۵۵ با توجه به نمودار زیر اختلاف میانگین از انحراف معیار چقدر است؟



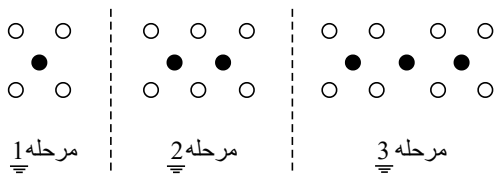
۵۶ جدول زیر را کامل کنید

شماره گام	نام گام	توضیح گام
۲		
	بیان مسئله	
۳		
		به تفسیر نتایج بدست آمده می پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می کنیم
۴		

۵۷ اگر داده دورافتاده داشته باشیم نمی توانیم تنها به محاسبه و بسنده کنیم.

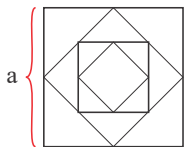
۵۸ دامنه میان چارکی برابر تفاضل و است.

۵۹ با توجه به شکل زیر، در چه مرحله ای $\frac{11}{35}$ شکل، توپ های توپر است؟



۶۰ در یک دنباله هندسی نسبت مشترک $\sqrt{5}$ و حاصلضرب پنج جمله اول ۲۴۳ است. جمله سوم را به دست آورید.

۶۱) در یک مربع به ضلع ۴۸ وسط‌های اضلاع مجاور را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید ایجاد شود و این کار را ادامه می‌دهیم. مساحت مربع مرحله دهم را به دست آورید. (مرحله اول را مربع به ضلع ۴۸ در نظر بگیرید)



۶۲) بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، چهار عدد را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند. مجموع آن چهار عدد را به دست آورید.

۶۳) در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. نسبت مشترک را به دست آورید.

۶۴) در یک دنباله هندسی جمله سوم $\frac{1}{p}$ و جمله دهم ۶۴ است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

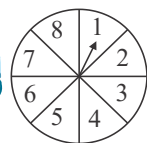
۶۵) مجموع جملات اول و دوم و سوم یک دنباله هندسی ۲۱ و مجموع جملات چهارم و پنجم و ششم آن ۱۶۸ است؛ الف) نسبت مشترک را به دست آورید.

ب) جمله چهارم را به دست آورید.

۶۶) حاصلضرب ۵ عدد که با هم تشکیل دنباله هندسی می‌دهند ۲۴۳ است. یکی از این اعداد حتماً چه عددی است؟

۶۷) در یک دنباله هندسی، جمله سوم $-\frac{1}{p}$ و جمله هشتم ۸ است. جمله دهم را به دست آورید.

۶۸) در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$ اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله و اگر $r > 1$ باشد، دنباله



۶۹) عقربه دستگاه چرخنده زیر روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد: الف) عقربه روی یکی از اعداد اول بایستد.

ب) عقربه روی عدد اول یا فرد بایستد.

پ) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

۷۰) قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا تبدیل به بخار شود.

ب) نتیجه یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای که سوالات را به تصادف پاسخ دهیم.

ج) از بین اعداد ۱ تا ۱۰ یک عدد را انتخاب می‌کنیم.

د) پرتاب تاسی که همه وجه‌های آن ۴ باشد.

۷۱) اگر $A = \phi$ باشد مقدار $P(A)$ برابر است.

۷۲) اگر باشد، آنگاه $P(A) \leq P(B)$

۷۳) مجموعه تمام برآمدهای ممکن در یک پدیده تصادفی نام دارد.

۷۴) ۲۰ کتاب روان‌شناسی و ۲۵ کتاب علوم تربیتی مختلف در یک کتابخانه موجود است.

الف) به چند طریق می‌توان یک کتاب روان‌شناسی یا یک کتاب علوم تربیتی را انتخاب کرد.

ب) به چند طریق می‌توان یک کتاب روان‌شناسی و یک کتاب تربیتی انتخاب کرد.

۷۵) اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود به طوری که در مرحله اول n طریق و در مرحله دوم هریک از n طریق به m روش انجام شود، کل آن عمل به طریق انجام پذیر است.

۷۶) حاصل $2! + 5!$ برابر است.

۷۷) اگر از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهار راه موجود باشد، تعداد راه‌های ممکن برای سفر از شهر A به شهر C به طوری که از B یک بار عبور کنیم برابر راه است.

۷۸) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل $C(5, 2)$ برابر $C(5, 3)$ است.

ب) از بین ۳ مداد و ۴ خودکار به ۷ طریق می‌توان یک خودکار و یک مداد را انتخاب کرد.

پ) با ارقام "۲، ۵، ۶"، نه عدد دو رقمی متمایز با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت.

۷۹) با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی‌معنی).

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

ب) با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

۸۰) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۸۱) در یک دنباله حسابی اگر $a_6 + a_4 + a_8 = 90$ باشد، جمله ششم دنباله چقدر است؟

۸۲) در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۲ و اختلاف مشترک ۲۰ است. کدام جمله از دنباله برابر ۵۹۲ است؟

۸۳) برای جملات دنباله روبه‌رو:

۳، ۸، ۱۳، ۱۸، ۲۳، ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به‌دست آورید.

۸۴) مجموع سی جمله اول دنباله حسابی روبه‌رو را به‌دست آورید.

-۱، ۴، ۹، ...

۸۵) هریک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب

است محاسبه احتمال این‌که عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

۸۶) می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این خودرو را

انتخاب کنیم؟

۸۷) به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

۸۸) حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m, n اعداد حقیقی مثبت‌اند).

الف) $(m^4 n^3)^2 (m^{\frac{1}{7}} n^{\frac{1}{6}})^6$

ب) $21^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{3}}$

۸۹) هشتمین جمله یک دنباله حسابی برابر ۶۵ و جمله شانزدهم آن برابر ۱۰۵ است. جمله بیست و نهم این دنباله را به‌دست آورید.

۹۰) مجموعه پنج عضوی $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱) ابتدا باید جمله عمومی دنباله را (رابطه تابعی دنباله) با استفاده از جملات به دست آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} n=1 \\ \rightarrow a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1!} \\ \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ \\ n=3 \\ \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!} \end{array} \right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

حال جملاتی که از $\frac{1}{300}$ بزرگتر هستند را می‌یابیم.

$$a_n > \frac{1}{300} \Rightarrow \frac{1}{n!} > \frac{1}{300}$$

طرفین را وارون می‌کنیم علامت نامساوی تغییر می‌کند:

$$n! < 300 \xrightarrow[\text{ع!}=720]{\text{د!}=120} n \leq 5 \Rightarrow n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۵ جمله بزرگتر از $\frac{1}{300}$ داریم:

۲) با توجه به فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ داریم:

$$d = \frac{10 - (-17)}{10 - 1} = \frac{27}{9} = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d \Rightarrow a_n = -17 + (n-1) \times 3 \\ \Rightarrow a_n = 3n - 20$$

۳)

پاسخ: در a_n مقدار $n = 2$ و در b_n مقدار $n = 4$ را جایگزین می‌کنیم:

$$a_2 = \frac{2+6}{3 \times 2-2} = 2, \quad b_4 = 4^2 - 1 = 15 \Rightarrow a_2 + b_4 = 2 + 15 = 17$$

۴)

(الف) ابتدا با جای‌گذاری ۳ و ۴ به جای n در جمله عمومی دنباله حاصل u_3 و u_4 را می‌یابیم:

$$u_n = n^2 - n \begin{cases} n=3 \\ \rightarrow u_3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6 \\ \\ n=4 \\ \rightarrow u_4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow u_4 - u_3 = 12 - 6 = 6$$

(ب) با جای‌گذاری ۵ و ۶ به جای n در جمله عمومی دنباله حاصل u_5 و u_6 را می‌یابیم:

$$u_n = n^2 - n \begin{cases} n=5 \\ \rightarrow u_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 \\ \\ n=6 \\ \rightarrow u_6 = 6^2 - 6 = 36 - 6 = 30 \end{cases} \Rightarrow u_5 + u_6 = 20 + 30 = 50$$

۵) کلمه شیراز ۵ حرف دارد، بنابراین:

$$\text{الف) } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$\text{ب) } \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60$$

$$\text{ج) } \boxed{1} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 6$$

با «ش» شروع شود به «ز» ختم شود

۶)

$$\text{الف) هر سه قرمز (الف): } \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$\text{ب) هر سه قرمز یا هر سه آبی} = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

۷)

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{0,18}} = (0,18)^{\frac{1}{6}}$$

۸) رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ جمله عمومی دنباله هندسی است که در آن a_1 جمله اول و r نسبت مشترک دنباله است؛ داریم:

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

در نتیجه:

$$\frac{a_{10}}{a_4} = \frac{a_1 r^9}{a_1 r^3} = \frac{r^6}{r^3} = r^3 = 8$$

۹) چون اختلاف هر دو جمله متوالی یکسان است، دنباله حسابی است؛ پس:

$$d = 31 - 35 = -4, \quad a_1 = 35$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{10} = 35 + 9 \times (-4) = 41$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(35 + 41) = 5 \times (-6) = -60$$

داریم:

۱۰) الف) درست

ب) نادرست

۱۱)

پاسخ: به کمک فرمول جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{cases} 52 = a_1 + 10d \\ 92 = a_1 + 18d \end{cases} \Rightarrow 92 - 52 = 8d \Rightarrow d = \frac{40}{8} = 5 \xrightarrow[d=5]{a_{11}=52} a_1 + 10 \times 5 = 52 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{30} = 2 + (30-1)5 = 147$$

۱۲) میانگین داده‌ها برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها:

$$\bar{x} = \frac{15 + 25 + 35 + 45}{4} = 30$$

۱۳) میانگین داده‌ها برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها:

$$\bar{x} = \frac{20 + 4 + 9 + 12 + 3 + 10 + 5}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

۱۴) وزن اولیه صفحه را برابر با جمله اول دنباله حسابی در نظر می‌گیریم. هر هفته ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم می‌شود؛ یعنی اختلاف مشترک دنباله حسابی $d = -1875$ است.

وزن صفحه پس از شش هفته برابر با a_6 می‌باشد.

$$a_1 = 12500, \quad d = -1875$$

↓
کاهش

برای نوشتن جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 12500 + (n-1)(-1875)$$

$$\Rightarrow a_n = 12500 - 1875n + 1875 = 14375 - 1875n$$

$$\Rightarrow a_6 = 14375 - 1875 \times (6) = 14375 - 11250 = 3125 \quad (\text{وزن صفحه پس از شش هفته})$$

۱۵) با توجه به دنباله‌های روبه‌رو داریم: $a_n = 3^n$ و $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ و $c_n = \frac{1}{3n-1}$ و $d_n = n^2 - 1$

الف) برای به دست آوردن عبارت زیر در دنباله b_n با جایگذاری $n=1$ و در دنباله a_n با جایگذاری $n=2$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$a_2 + b_1 = (3)^2 + (-\frac{1}{2})^{1+1} = 9 + (\frac{-1}{2})^2 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{36+1}{4} = \frac{37}{4}$$

ب) برای به دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله c_n با جایگذاری $n=2$ و در دنباله d_n با جایگذاری $n=1$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$c_2 - d_1 = \frac{1}{3(2)-1} - ((1)^2 - 1) = \frac{1}{6-1} - (1-1) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

ج) برای به دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله b_n با جایگذاری $n=4$ و در دنباله d_n با جایگذاری $n=2$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$b_4 + d_2 = (\frac{-1}{2})^{4+1} + ((2)^2 - 1) = (\frac{-1}{2})^5 + 3 = \frac{-1}{32} + 3 = \frac{-1+96}{32} = \frac{95}{32}$$

۱۶) الف) محور افقی در نمودار نمایانگر x ‌های تابع و محور قائم نمایانگر درصد جمعیت است.

$f(n)$ یعنی درصد جمعیتی که پس از گذشت n سال از اینترنت استفاده می‌کنند.

$f(1) = 1\%$
پس از گذشت ۷ سال ۱٪ از جمعیت
از اینترنت استفاده می‌کنند.

$f(7) = 9\%$
پس از گذشت ۷ سال ۹٪ از جمعیت
از اینترنت استفاده می‌کنند.

ب) با داشتن دو نقطه از یک خط می‌توانیم معادله خط را به‌دست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} f(12) = 15 \\ f(22) = 45 \end{array} \right\} \text{ شیب خط: } m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(22) - f(12)}{22 - 12} = \frac{45 - 15}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

پس معادله خط برابر است با:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 45 = 3(x - 22) \Rightarrow y = 3x - 66 + 45 = 3x - 21$$

با داشتن ضابطه خطی فوق و استفاده از نمودار در سال ۲۰۱۵، ۲۲ سال گذشته است. بنابراین در سال ۲۰۲۰، $(22 + 5) = 27$ سال گذشته است.

اکنون با قرار دادن x به‌جای ۲۷، درصد جمعیت در سال ۲۰۲۰ داریم:

$$y = 3x - 21 \xrightarrow{x=27} y = 3(27) - 21 = 60$$

بنابراین ۶۰٪ جمعیت جهان از اینترنت استفاده می‌کنند.

۱۷

$$n(S) = 11!$$

اگر ترتیب قرار گرفتن ۱۱ بازیکن را ۱ تا ۱۱ بنامیم، کاپیتان و دروازه‌بان در مکان‌های زیر می‌توانند قرار بگیرند تا در عکس حتماً ۴ نفر بین آن‌ها باشد.

$$(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (6, 11)$$

۶ جایگاه برای کاپیتان و دروازه‌بان داریم در ضمن جایگاهی بین کاپیتان و دروازه‌بان هم داریم

$$n(A) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جایگاه کاپیتان و دروازه‌بان}}}{6} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جایگاهی کاپیتان و دروازه‌بان}}}{2!} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جایگاهی ۹ نفر دیگر}}}{9!}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6 \times 2! \times 9!}{11!} = \frac{6 \times 2 \times 9!}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

۱۸

الف) $S = \{1, 3, \dots, 19\}$

ب) $A = \{3, 9, 15\}$

پ) $B = \{1, 9\}$

ت) $A \cap B = \{9\}$, $A - B = \{3, 15\}$

۱۹

الف) $\binom{6}{3} \times \binom{5}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 10 = 200$
سه نفر - دوازدهم سه نفر - یازدهم

ب) $\binom{1}{1} \times \binom{10}{5} = 1 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$
انتخاب کاپیتان انتخاب ۵ نفر
از بین فرد مشخص از پایه دوازدهم از ۱۰ نفر باقی‌مانده

پ) $\binom{6}{4} \times \binom{5}{2} + \binom{6}{5} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{6} \times \binom{5}{0}$
چهار نفر دوازدهم و دو نفر یازدهم پنج نفر دوازدهم و یک نفر یازدهم شش نفر دوازدهم
 $15 \times 10 + 6 \times 5 + 1 = 181$

ت) $\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 15 = 150$
دو نفر - یازدهم چهار نفر - دوازدهم

دوازدهم یا یازدهم یا دهم
۲۰) $10 + 11 + 12 = 33$

۲۱) اگر دنباله اولیه با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d باشد و دنباله ثانویه با جمله اولیه a'_1 و اختلاف مشترک d' باشد، داریم:

$$d' = d - 1$$

$$a'_1 = a_1 + 3$$

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله اولیه برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + (20-1)d) = 10(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d$$

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله ثانویه برابر است با:

$$S'_{20} = \frac{20}{2}(2a'_1 + (20-1)d') \Rightarrow S'_{20} = 10(2(a_1 + 3) + 19(d-1))$$

$$S'_{20} = 10(2a_1 + 6 + 19d - 19) = 10(2a_1 + 19d - 13) = 20a_1 + 190d - 130$$

پس اختلاف مجموع ۲۰ جمله اولیه از ۲۰ جمله ثانویه برابر است با:

$$S_{20} - S'_{20} = 20a_1 + 190d - (20a_1 + 190d - 130) =$$

$$20a_1 + 190d - 20a_1 + 190d + 130 = 130$$

۲۲) در دنباله حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

طبق فرض داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_{10} = 300$$

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 \Rightarrow 3(a_1 + a_{10}) = 300$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{10} = \frac{300}{3} = 100$$

حاصل جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 50(a_1 + a_{10})$$

$$\xrightarrow{a_1 + a_{10} = 100} S_{10} = 50 \times (100) = 5000$$

۲۳) هر پرانتز را یک جمله از یک دنباله حسابی می توان در نظر گرفت که جمله اول آن $a_1 = x + 1$ است. اختلاف مشترک برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = x + 4 - x - 1 = 3$$

تعداد کل جملات برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow \frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{x + 31 - x - 1}{3} + 1 \Rightarrow n = \frac{30}{3} + 1 = 11$$

مجموع جملات دنباله با مشخصات به دست آمده برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(x+1) + (n-1)3)$$

مجموع ۱۱ جمله اول دنباله برابر ۴۰۰ شده است، با جایگذاری در معادله، مقدار x به دست می آید.

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2(x+1) + (11-1)3) = 400 \Rightarrow \frac{11}{2}(2x + 2 + 30) = 400$$

$$\xrightarrow{\times 2} \rightarrow 11(2x + 32) = 800 \Rightarrow 22x + 352 = 800 \Rightarrow 22x = 800 - 352$$

$$22x = 448 \Rightarrow x = \frac{448}{22} = \frac{224}{11}$$

۲۴) برای به دست آوردن a_n اگر مجموع n جمله اول را از $(n-1)$ جمله اول کم کنیم، حاصل جمله n ام خواهد بود؛ یعنی:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_n = 3n^2 - 8n$$

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 8(n-1) = 3(n^2 - 2n + 1) - 8n + 8$$

$$= 3n^2 - 6n + 3 - 8n + 8 = 3n^2 - 14n + 11$$

پس جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 8n - (3n^2 - 14n + 11)$$

$$= 3n^2 - 8n - 3n^2 + 14n - 11 = 6n - 11$$

$$\Rightarrow a_n = 6n - 11$$

۲۵) اگر $a_{n+1} = 3 + a_n$ فرمول بازگشتی دنباله حسابی باشد، اختلاف مشترک برابر است با:

$$a_{n+1} = 3 + a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1)d = a_1 + 14d$$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d = a_1 + 6d$$

$$a_{15} - a_7 = a_1 + 14d - (a_1 + 6d) = 8d = 24 \Rightarrow d = 3$$

$$\Rightarrow a_{15} - a_7 = 8d \xrightarrow{d=3} a_{15} - a_7 = 8 \times (3) = 24$$

$$2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{2(m-2)x}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - (m-2)x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2m$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$(x_1 + x_2) = (m - 2) \Rightarrow x_1 + x_2 = m - 2$$

$$m - 2 = 2m \Rightarrow 2m - m = -2 \Rightarrow m = -2$$

$$a_9 = 42, \quad a_{20} = 75$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{20} - a_9}{20 - 9} = \frac{75 - 42}{20 - 9} = \frac{33}{11} = 3$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 42 \xrightarrow{d=3} a_9 = a_1 + 8 \times (3) = 42$$

$$\Rightarrow a_1 + 24 = 42 \Rightarrow a_1 = 42 - 24 = 18$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \xrightarrow{\substack{d=3 \\ a_1=18}} a_n = 18 + (n - 1)3 = 18 + 3n - 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 15$$

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$a, b, c \Rightarrow a + c = 2b$$

$$m + 5 = \frac{(3m - 1) + (2m - 4)}{2}$$

$$(3m - 1) + (2m - 4) = 2(m + 5)$$

$$3m - 1 + 2m - 4 = 2m + 10$$

$$5m - 5 = 2m + 10 \Rightarrow 5m - 2m = 10 + 5$$

$$3m = 15 \Rightarrow m = 5$$

$$1, \frac{10}{y}, \frac{13}{y}, \dots$$

$$\frac{10}{y} - 1 = \frac{10 - y}{y} = \frac{3}{y}$$

$$\frac{13}{y} - \frac{10}{y} = \frac{13 - 10}{y} = \frac{3}{y}$$

با گسترده کردن جملات پانزدهم و هفتم داریم:

۲۶) معادله را تقسیم بر ضریب $2x^2$ می‌کنیم:

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله فوق باشند، داریم:

در معادله درجه ۲ با ریشه‌های x_1 و x_2 از طریق اتحاد جمله مشترک داریم:

اگر معادله صورت سوال را مساوی عبارت روبه‌رو قرار دهیم مجموع ریشه‌ها برابر می‌شود با قرینه ضریب x :

و چون m واسطه حسابی ریشه‌ها است می‌توان نوشت:

۲۷) با استفاده از اطلاعات داده شده جمله اول و اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم.

با قرار دادن جمله مشترک در معادله روبه‌رو جمله اول را به دست می‌آوریم.

با استفاده از تعریف جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

۲۸) اگر a, b, c سه جمله متوالی از دنباله حسابی را داشته باشیم، واسطه حسابی آن برابر است با:

پس برای جملات متوالی $1, 3m - 1, m + 5, 2m - 4$ داریم:

بنابراین مقدار m با ۵ برابر است.

۲۹) دنباله حسابی دنباله‌ای است که هر جمله آن جز جمله اول از افزودن مقداری ثابت به جمله قبل به دست آید.

پس کفایت نشان دهیم تفاضل هر دو جمله متوالی ثابت است:

پس دنباله مورد نظر دنباله حسابی است.

۳۰) برای محاسبه حاصل جمع داده شده، هر پرانتز را یک جمله از دنباله حسابی در نظر می‌گیریم که:

$$a_1 = 4, \quad d = a_2 - a_1 = 4 + 0,25 - 4 = 0,25$$

برای به دست آوردن تعداد جملات، می‌توانیم جمله عمومی را بنویسیم و مساوی با $(4 + 4)$ قرار دهیم تا n به دست آید.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot 0,25$$

$$\Rightarrow a_n = 4 + 0,25n - 0,25 = 3,75 + 0,25n$$

$$a_n = 4 + 4 = 8 \Rightarrow 3,75 + 0,25n = 8$$

$$\Rightarrow 0,25n = 5,25 \Rightarrow n = \frac{5,25}{0,25} = 21$$

اکنون مجموع را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{21}{2} \left(2 \cdot 4 + (21 - 1) \cdot 0,25 \right) = \frac{21}{2} \left(8 + \frac{20}{4} \right) = \frac{21}{2} \left(8 + \frac{20}{4} \right) = \frac{21}{2} (13) = \frac{273}{2}$$

۳۱) برای به دست آوردن مجموع جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_1 = 5, \quad d = 12 - 5 = 7$$

شماره جمله $a_n = 103$ و تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 5 + (n - 1) \times 7 \Rightarrow 103 = 7n - 2 \Rightarrow n = \frac{105}{7} = 15$$

بنابراین مجموع ۱۵ جمله را می‌خواهیم حساب کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2 \times 5 + (15 - 1) \cdot 7)$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (10 + 14 \times 7) = \frac{15}{2} \times (10 + 98) = \frac{15}{2} \times (108) = 15 \times 54 = 810$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_{15} = 810$$

۳۲) جمله عمومی دنباله ذکر شده برابر است با:

$$a_n = 7n - 3$$

در نتیجه برای به دست آوردن جمله $(3n - 2)$ ام کفایت به جای n عبارت $(3n - 2)$ را قرار دهیم:

$$a_n = 7n - 3 \xrightarrow{\text{جمله } 3n-2} a_{(3n-2)} = 7(3n - 2) - 3$$

$$\Rightarrow a_{(3n-2)} = 21n - 14 - 3 \Rightarrow a_{(3n-2)} = 21n - 17$$

پس جمله $(3n - 2)$ ام برابر است با: $(21n - 17)$.

۳۳) برای به دست آوردن جمله 32 ام، در ابتدا لازم است جمله عمومی را به دست آوریم:

$$\text{جمله اول } a_1 = 4$$

$$d = a_{n+1} - a_n \Rightarrow d = 18 - 11 = 7$$

جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 4 + (n - 1)7 \Rightarrow a_n = 4 + 7n - 7 \Rightarrow a_n = 7n - 3$$

اکنون برای به دست آوردن جمله 32 ام، $n = 32$ را قرار می‌دهیم:

$$a_n = 7n - 3 \xrightarrow{n=32} a_{32} = 7 \times (32) - 3 = 224 - 3 = 221$$

جمله 32 ام برابر است با:

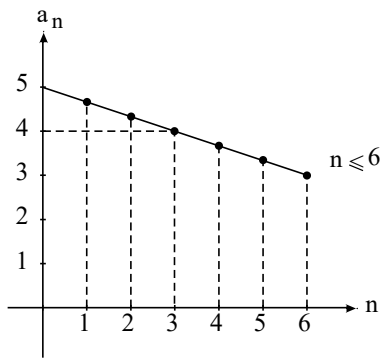
$$a_{32} = 221$$

۳۴) برای رسم نمودار دنباله، ابتدا دو نقطه دلخواه را به ضابطه دنباله داده و y را به دست می‌آوریم، سپس با وصل کردن دو نقطه به همدیگر نمودار تابع به دست می‌آید که به ازای n های

طبیعی نمودار دنباله می‌شود. پس به ازای $6 \leq n$ نقاط دنباله را روی خط مشخص می‌کنیم. (البته می‌توان با محاسبه ۶ جمله اول نیز نقاط را مشخص کرده و نمودار دنباله را به ازای $n \leq 6$ رسم کرد.)

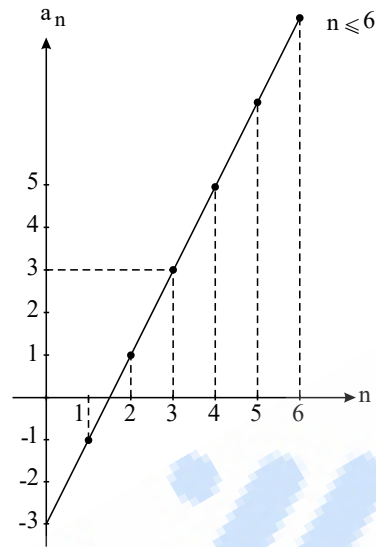
الف) $a_n = \frac{-n}{3} + 5 \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + 5$

x	0	3
y	5	4



ب) $b_n = 2n - 3 \Rightarrow y = 2x - 3$

x	0	3
y	-3	3



۳۵ فرمول کلی جمله عمومی دنباله‌ای به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = a_1 + nd - d$$

در نتیجه ضریب n اختلاف مشترک و جمله فاقد n برابر $a_1 - d$ است.

بنابراین در $a_n = 3n - 5$ داریم:

$3n = dn \Rightarrow d = 3$ (اختلاف مشترک)

$a_1 - d = -5 \Rightarrow a_1 - 3 = -5 \Rightarrow a_1 = -5 + 3 = -2$ (جمله اول)

۳۶ الف

مساحت رنگ شده در مرحله اول $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مساحت رنگ شده در مرحله دوم $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

مساحت رنگ شده در مرحله سوم $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

دنباله مساحت مربع‌های رنگی $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$

دنباله هندسی است زیرا:

$$r = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \quad r = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad r = \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{4})^n)$$

$$S_6 = \frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{4})^6) = \frac{1}{3} (1 - \frac{1}{4096}) = \frac{1}{3} \times \frac{4095}{4096} = 0,33325$$

ب) می‌دانیم $S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$ است. پس:

ب) در رابطه قسمت (ب)، به جای $n = 6$ می‌گذاریم:

۳۷ طبق داده‌های سؤال ۸۵ درصد وزن آن از بین می‌رود، سپس ۱۵ درصد آن باقی می‌ماند.

$$15000 \xrightarrow{\text{پس از ۱ دقیقه}} \frac{85}{100} \times 15000 \xrightarrow{\text{۲ دقیقه}} \frac{85}{100} \times (\frac{85}{100} \times 15000) \rightarrow \dots$$

پس از n دقیقه:

$$\left(\frac{85}{100}\right)^n \times 15000$$

$$\left(\frac{85}{100}\right)^n \times 15000 = \left(\frac{17}{20}\right)^5 \times 15000$$

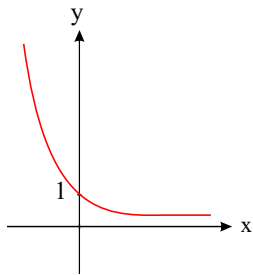
$$36 = k^r \times 3^r \Rightarrow 36 = k^r \times 9 \rightarrow k^r = 4 \rightarrow k = 2$$

$$g(x) = 2^x \Rightarrow g(3) = 2^3 = 8$$

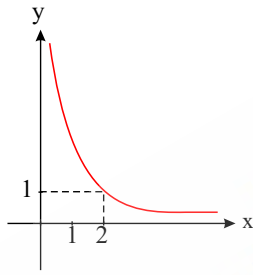
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \Rightarrow (2^{-1})^{x-1} = (2^{-2})^{x+1} \Rightarrow 2^{-x+1} = 2^{-2x-2}$$

$$\Rightarrow -x + 1 = -2x - 2 \Rightarrow x = -3$$

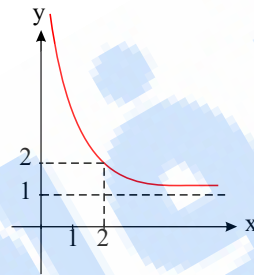
$$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3-1} = (2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } (-3, 16) \text{ است.}$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 1$$

بنابراین وزن باقی مانده شهاب سنگ پس از ۵ دقیقه:

۳۸) نمودار تابع $f(x)$ از نقطه $(2, 36)$ می‌گذرد، پس داریم:

پس تابع $g(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

۳۹) کافی است؛ معادلات دو تابع را با هم برابر قرار دهیم:

۳- x را در یکی از توابع مثلاً $f(x)$ ، جایگزین می‌کنیم:

۴۰)

۴۱) می‌دانیم تابع نمایی عامل x^2 ندارد؛ بنابراین داریم:

۴۲)

$$k - 2 = 0 \rightarrow k = 2, \quad f(x) = 2^x \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(-2) &= 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

۴۳)

$$(2, 1)^6 \times \left(\frac{21}{10}\right)^r \times \left(2\frac{1}{10}\right)^5 = (2, 1)^6 \times (2, 1)^r \times (2, 1)^5 = (2, 1)^{11}$$

۴۴)

با توجه به تعریف ریشه سوم داریم:

$$x^3 = -125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

۴۵)

با توجه به تعریف ریشه دوم داریم:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

۴۶)

$$\sqrt[5]{(\sqrt{3}-1)^5} = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt[6]{(2-2\sqrt{3})^6} = \underbrace{|2-2\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(2-2\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}-1 - (-2+2\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1+2-2\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}$$

۴۷)

$$\begin{cases} 125^{\frac{1}{6}} = (\delta^3)^{\frac{1}{6}} = \delta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\delta} \\ 125^{\frac{1}{2}} = \sqrt{125} \Rightarrow \sqrt{\delta} \times \sqrt{125} = \sqrt{\delta \times 125} = \sqrt{\delta^4} = \delta^2 = 25 \\ 16^{\frac{2}{3}} = (\nu^4)^{\frac{2}{3}} = \nu^{\frac{8}{3}} = 8 \end{cases}$$

$$A = 25 + 8 = 33$$

۴۸

$$\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{\sqrt{75}} = (\nu^5)^{\frac{1}{3}} = \nu^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\nu^5}$$

۴۹

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\nu + \sqrt{\nu})^2 - 4\nu\sqrt{\nu}} &= \sqrt{4 + 4\nu\sqrt{\nu} + \nu - 4\nu\sqrt{\nu}} = \sqrt{\nu} \\ \left(\frac{1}{\nu}\right)^{-0.25} &= (\nu^{-2})^{-\frac{1}{4}} = \nu^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\nu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حاصل عبارت: } \sqrt{\nu} - \sqrt{\nu}$$

۵۰ با توجه به نمودار داریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۲	-۳	۱	۴	۰

بنابراین داریم:

$$a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = -3 + 1 + 4 - 0 = 2$$

۵۱ بین جملات این دنباله رابطه $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ یا $(a_1 = a_2 = 1)$ برقرار است، بنابراین هر جمله برابر مجموع دو جمله قبلی است (دنباله فیبوناچی):

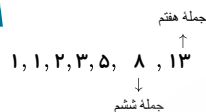
$$a_3 = 1 + 1 = 2, \quad a_4 = 1 + 2 = 3, \quad a_5 = 2 + 3 = 5, \quad a_6 = 3 + 5 = 8, \quad a_7 = 5 + 8 = 13$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

جمله دهم ۵۵ است.

۵۲ طبق رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی، جملات اول و دوم این دنباله ۱ هستند و هر جمله برابر مجموع دو جمله قبلی است، بنابراین جملات این دنباله به ترتیب به صورت زیر است:

$$a_1 = 1 + 1 = 2, \quad a_2 = 1 + 2 = 3, \quad a_3 = 2 + 3 = 5, \quad a_4 = 3 + 5 = 8, \quad a_5 = 5 + 8 = 13$$



۵۳ با توجه به متن سوال جمله عمومی دنباله به صورت $a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3}$ است.

برای آنکه جمله ۱۱ام (a_{11}) را بیابیم، ابتدا $2n + 1$ را برابر ۱۱ قرار می‌دهیم تا مقدار n مشخص شود:

$$2n + 1 = 11 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

حال با قرار دادن $n = 5$ در رابطه جمله عمومی، جمله a_{11} پیدا می‌شود.

$$a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3} \xrightarrow{n=5} a_{11} = \frac{5+2}{2(5)-3} = \frac{7}{7} = 1$$

۵۴

با توجه به شکل چون کل دایره 360° است، پس زاویه گروه A برابر 60° است زیرا:

$$A \text{ زاویه گروه} = 360^\circ - (120^\circ + 100^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$$

$$A \text{ زاویه گروه} = \frac{\text{تعداد افراد گروه } A}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ \Rightarrow 60^\circ = \frac{A \text{ تعداد گروه}}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{A \text{ تعداد گروه}}{30} \Rightarrow A \text{ تعداد گروه} = \frac{30}{6} = 5$$

۵۵

با توجه به نمودار \bar{x} برابر ۱۵ و σ انحراف معیار برابر $15 - 17 = 2$ است، پس داریم:

$$\text{اختلاف میانگین از انحراف معیار} = 15 - 2 = 13$$

۵۶

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ پیدا می‌کنیم به نمونه‌گیری شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۱	بیان مسئله	ابتدا مسئله‌ای که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری بیان می‌کنیم.
۳	گردآوری و پاک‌سازی	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می‌کنیم
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از معیارها و نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را مشابه با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.

۵۷) میانگین و انحراف معیار

۵۸) الف) Q_1 (چارک اول) و Q_3 (چارک سوم)

۵۹) با توجه به شکل در هر مرحله یک توپ توپر اضافه می‌شود و همچنین تعداد کل توپ‌ها در هر مرحله ۳ واحد اضافه می‌شود.

مرحله اول	مرحله دوم	مرحله سوم
$\frac{1}{3 \times 1 + 2}$	$\frac{2}{3 \times 2 + 2}$	$\frac{3}{3 \times 3 + 2}$
توپ ۱	توپ ۲	توپ ۳
کل توپ‌ها		

بنابراین رابطه نسبت توپ‌های رنگ شده به کل توپ‌ها در مرحله n م به صورت $\frac{n}{3n+2}$ است.

حال با مساوی قرار دادن $\frac{11}{35}$ و $\frac{n}{3n+2}$ مرحله موردنظر را می‌یابیم.

طرفین وسطین $\frac{n}{3n+2} = \frac{11}{35} \rightarrow 35n = 33n + 22 \Rightarrow 2n = 22 \Rightarrow n = 11$

مرحله یازدهم است.

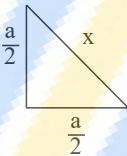
۶۰) با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی حاصلضرب جملات اول تا پنجم را می‌نویسیم:

$$a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times a_1 r^3 \times a_1 r^4 = 243$$

$$a_1^5 r^{10} = 243 \Rightarrow (a_1 r^2)^5 = 3^5 \Rightarrow a_1 r^2 = 3 \Rightarrow a_r = 3$$

۶۱) کافی است مساحت‌های مربع‌های ایجاد شده را به دست آوریم و ببینیم چه رابطه‌ای با هم دارند.

$$S_1 = a^2$$



$$S_r = x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$S_n = \frac{a^2}{2^{n-1}} \xrightarrow[n=1]{a=48} S = \frac{48^2}{2^9} = \frac{(3 \times 2^4)^2}{2^9} = \frac{3^2 \times 2^8}{2^9} = \frac{9}{2}$$

۶۲) اگر بین دو عدد a و b تعداد n عدد را به گونه‌ای قرار دهیم که با هم تشکیل دنباله هندسی دهند نسبت مشترک از رابطه $\frac{b}{a} = r^{n+1}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$r^{4+1} = \frac{128}{4} = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین آن اعداد عبارتند از:

$$4, \overset{\times 2}{8}, \overset{\times 2}{16}, \overset{\times 2}{32}, \overset{\times 2}{64}, \overset{\times 2}{128}$$

$$8 + 16 + 32 + 64 = 120$$

مطلوب سوال:

۶۳) با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی و اطلاعات سوال:

$$a_1 + a_r = 28 \Rightarrow a_1 + a_1 r^3 = 28 \Rightarrow a_1 (1 + r^3) = 28 \quad (1)$$

$$a_r + a_r = 12 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^2 = 12 \Rightarrow a_1 r (1 + r) = 12 \quad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1+r^3}{r(1+r)} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{اتحاد}} \frac{(1+r)(1-r+r^2)}{r(1+r)} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - 3r + 3r^2 = 7r \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0, a = 30; b = -10, c = 3$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(9) = 64 \Rightarrow r = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۶۴) با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow a_1 r^2 = \frac{1}{r} \quad (1)$$

$$a_{10} = 64 \rightarrow a_1 r^9 = 64 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^7} = \frac{1}{64} = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} \Rightarrow r^7 = 2^7 \Rightarrow r = 2$$

$r = 2$ را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم تا a_1 به دست آید:

$$a_1 \times 2^r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \times 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

بنابراین جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{8} \times 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2^3} = 2^{n-4} \Rightarrow a_n = 2^{n-4}$$

۶۵) با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی می توان نوشت:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21 \rightarrow a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 21 \rightarrow a_1 (1 + r + r^2) = 21 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 168 \rightarrow a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = 168 \rightarrow a_1 r^3 (1 + r + r^2) = 168 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می کنیم:
(الف)

$$\frac{1}{r^3} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

(ب)

$r = 2$ را در رابطه (۱) جایگذاری می کنیم.

$$a_1 (1 + 2 + 4) = 21 \Rightarrow a_1 \times 7 = 21 \Rightarrow a_1 = 3$$

بنابراین جمله چهارم برابر است با:

$$a_4 = a_1 r^3 = 3 \times 2^3 = 24$$

۶۶) چون تعداد جملات فرد است بهتر است آن ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

جملات دنباله: $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 243 \Rightarrow a^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

پس یکی از این اعداد حتماً ۳ است.

۶۷) با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی:

$$\begin{cases} a_5 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 r^4 = -\frac{1}{4} \\ a_8 = 8 \Rightarrow a_1 r^7 = 8 \end{cases}$$

طرفین ۲ رابطه بالا را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{-\frac{1}{4}}{8} = -\frac{1}{32} \Rightarrow r = -2$$

نسبت مشترک را در یکی از رابطه های بالا جایگزین کرده و جمله اول را به دست می آوریم:

$$a_1 r^7 = -\frac{1}{4} \xrightarrow{r=-2} a_1 \times (-2)^7 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 \times 4 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{16}$$

بنابراین جمله دهم برابر است با:

$$a_{10} = a_1 r^9 = -\frac{1}{16} \times (-2)^9 = -\frac{1}{16} \times -512 = 32$$

۶۸) کاهش - افزایش - ثابت

۶۹)

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

(الف)

$$A = \underbrace{\{2, 3, 5, 7\}}_{\text{اعداد اول}} \rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$B = \underbrace{\{1, 3, 5, 7, 2\}}_{\text{عدد اول یا فرد}} \rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

(پ)

$$C = \underbrace{\{3, 6\}}_{\text{مضرب ۳}} \rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۷۰) الف) قطعی

ب) تصادفی

ج) تصادفی

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}[2 \times a_1 + (30-1) \times d] \xrightarrow{a_1=-1, d=5} S_{30} = 15[-2 + 145] = 2145$$

۸۵

A پیشامد مورد نظر و S فضای نمونه عبارتند از:

$$A = \{3, 9, 15\} \quad S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

۸۶

کامیون وانت سواری

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10 & + & 12 & + & 6 & = & 28 \end{array}$$

۳ توپ قرمز یا ۳ توپ آبی باید انتخاب کنیم: ۸۷

$$\text{تعداد حالات مطلوب: } \binom{5}{3}^{\text{قرمز}} + \binom{4}{3}^{\text{آبی}} = \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{3!1!} = 14$$

۸۸ پاسخ:

$$\text{الف } (m^x n^y)(m^z n^1) = m^{x+z} n^{y+1}$$

$$\text{ب) } (21 \times \frac{3}{5})^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{2}{3}}$$

۸۹

پاسخ: برای دو جمله a_m و a_n داریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_{16} - a_8}{16 - 8} = \frac{105 - 65}{16 - 8} = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_8 = a_1 + (8-1) \times 5 \xrightarrow{a_8=65} 65 = a_1 + 35 \Rightarrow a_1 = 30$$

$$\Rightarrow a_{29} = 30 + (29-1) \times 5 \Rightarrow a_{29} = 170$$

۹۰

$$\text{زیرمجموعه‌های دو عضوی } C(5, 2) = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$