

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰۰۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی (تجربی) یازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروفچینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۲ دو نقطه  $A(14, 3)$  و  $B(10, -13)$  را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط  $AB$  بدست آورید.

۳ فاصله نقطه  $P(7, -4)$  را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر بدست آورید.

الف)  $L: 2x + y = 5$

ب)  $T: x = 5$

پ)  $\Delta: y = 0$

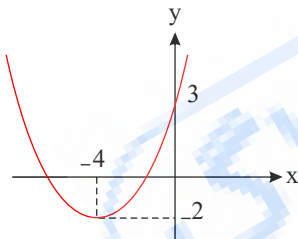
۴ بیشترین مقدار تفاضل  $\frac{1}{9}$  مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، چقدر است؟

۵ مقدار  $m$  را طوری بدست آورید که معادله  $(m-1)x^2 + (m-4)x - 3m = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و قرینه باشد و سپس این ریشه‌ها را بدست آورید.

۶ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 1 = 0$  بحث کنید.

۷ فاصله‌ی دو خط به معادلات  $y = \sqrt{3}x + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  را بیابید.

۸ در شکل زیر نمودار سهمی  $P(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  را بدست آورید.



۹ نقطه‌ی  $M(-4, 1)$  وسط پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی  $A$  و  $B(-3, 2)$  است. مختصات نقطه‌ی  $A$  را بیابید.

۱۰ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط  $A(2, -2)$  و  $B(6, 4)$  هستند.

الف - اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب - آیا نقطه  $C(7, 3)$  بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۱۱ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$  ،  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  ، ب)  $f(x) = x - 2$  ،  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

۱۲ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & , x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}) & , x \leq 0 \end{cases}$  به ازای چه مقداری از  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

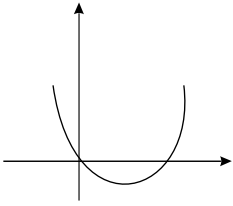
۱۳ اگر  $f$  یک تابع خطی باشد به طوری که  $f(1) = 5$  و  $f^{-1}(9) = 3$ ، آنگاه ضابطه‌ی  $f$  و  $f^{-1}$  را بدست آورید.

۱۴ آیا دو تابع  $f(x) = (\sqrt{x})^2$  و  $g(x) = |x|$  با هم برابرند؟

۱۵ معادله‌ی زیر را با روش تجزیه حل کنید.

$x^2 - 5x = 24$

۱۶) شکل روبه‌رو مربوط به تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است.

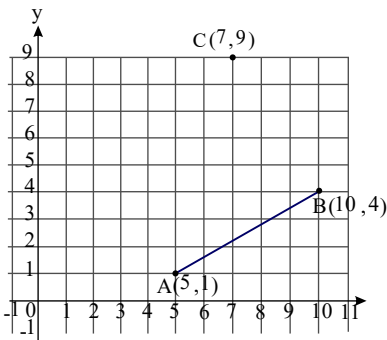


الف) علامت  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.

ب) مقدار  $c$  را بیابید.

۱۷) ثابت کنید نقاط  $A(6, -13)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(13, 10)$  و  $D(21, -5)$  رئوس یک مربع‌اند.

۱۸) مربع  $ABCD$  در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که  $A(5, 1)$  و  $B(10, 4)$  دو رأس مجاور آن هستند. الف - شیب ضلع  $AB$  را بنویسید.



ب - شیب ضلع  $AD$  را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

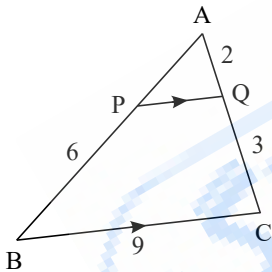
پ - اگر بدانیم نقطه  $C(7, 9)$  رأس سوم مربع است، مختصات رأس  $D$  را بیابید.

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

۱۹) الف - نقطه  $N(5, -4)$  وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B(7, -2)$  است. مختصات نقطه  $A$  را بیابید.

ب - قرینه نقطه  $C(1, 2)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$  را بدست آورید.

۲۰) در شکل مقابل  $PQ \parallel BC$  است. طول پاره‌خط‌های  $AP$  و  $PQ$  را بدست آورید.



۲۱) در هر مورد، مقدار عددی  $\frac{a}{b}$  را به دست آورید.

الف)  $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$

ب)  $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

۲۲) اگر  $\tan 20^\circ = 0.36$  باشد حاصل  $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$  را بدست آورید.

۲۳) اگر  $x = \frac{2}{\sin \alpha}$  و  $y = 3 \cot \alpha$  باشد، رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  بدست آورید.

۲۴) وارون تابع  $f(x) = 2x + 3$  با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x + 3$  را بدست آورید.

۲۵) یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان وارون آنها را بنویسید.

$f = \{(1, 4), (2, 7), (6, 9), (5, 12)\}$

$g = \{(2, 3), (4, 9), (7, -1), (5, 9)\}$

۲۶) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف)  $\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ - \cos 60^\circ \times \cos 45^\circ$

ب)  $\frac{\cos 30^\circ - \sin 60^\circ}{\tan 60^\circ + \cot 30^\circ}$

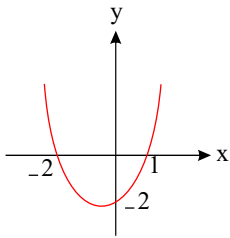
پ)  $2 \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ$

ت)  $\tan 30^\circ \times \cot 60^\circ - \tan 60^\circ \times \cot 30^\circ$

ث)  $4 \sin 30^\circ \times \tan 45^\circ + 2 \cos 30^\circ \times \cot 45^\circ$

۲۷) طول اضلاع یک مثلث ۱۱، ۷ و ۵ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اول ۲۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را بدست آورید.

۲۸) باتوجه به نمودار مقابل مربوط به تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  را بدست آورید.



۲۹) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$(3x^2 + 1)^2 - 17(3x^2 + 1) + 52 = 0 \quad u = 3x^2 + 1$

۳۰) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 5 = 0$  باشند، حاصل عبارت  $\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1}$  را بیابید.

۳۱) نقطه‌ای روی خط  $y = 2x$  بیابید که از دو نقطه‌ی  $A(1, 1)$  و  $B(3, -1)$  به یک فاصله باشد.

۳۲) اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، هر یک از پارامترهای  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید تا نمودار تابع محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض  $-3$  و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول  $3$  قطع کند و از نقطه‌ی  $(-1, 4)$  هم بگذرد.

۳۳) مقدار  $m$  را طوری بدست آورید که معادله  $x^2 - 4x + m + 3 = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد.

۳۴) اگر معادله‌ی  $x^2 - (m + 1)x + 2m - 1 = 0$  دارای دو ریشه‌ی مساوی باشد، مقدار  $m$  را بدست آورید.

۳۵) فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات  $3y - 2x = 11$  و  $x + 2y = 5$  چقدر است؟

۳۶) اگر  $f(x) = \sqrt{x + 4}$  و  $g(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$ ، مطلوب است:

الف

$D_{\frac{f}{g}}$

ب

$D_{\frac{g}{f}}$

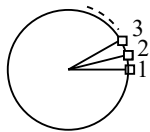
پ

$D_{\frac{f}{g} + \frac{g}{f}}$

ت

$(2f - g)(5)$

۳۷) فرض کنید سوار چرخ و فلکی با ۸۰ کابین شده‌اید. اگر در ابتدا در کابین شماره ۵ قرار داشته باشید، پس از  $\frac{84\pi}{20}$  رادیان دوران، در موقعیت کدام کابین قرار خواهید داشت؟



۳۸) کدام گزاره صحیح است؟

الف - نقطه  $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$  روی نمودار تابع  $y = 5^x$  قرار دارد.

ب - محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 10^x$  با محور  $y$ ها، نقطه  $(0, 10)$  است.

پ - دامنه توابع با ضابطه‌های  $y = 2^x$  و  $y = x^2$  مساوی‌اند.

ت - محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 6^x$  با محور  $x$ ها، نقطه  $(6, 0)$  است.

۳۹) با استفاده از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

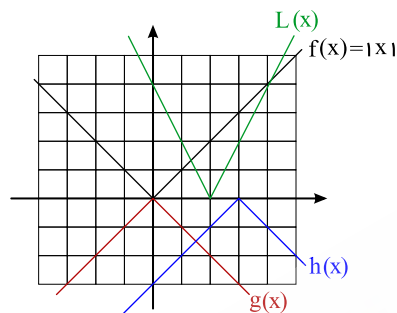
الف)  $r(x) = 2\sqrt{x}$

ب)  $s(x) = -\sqrt{x-2}$

پ)  $t(x) = -3\sqrt{x}$

ت)  $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

ث)  $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$



۴۰) وارون تابع  $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$  را بدست آورید.

۴۱) پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۴۲) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

۴۳) اگر انحراف‌معیار داده‌های ۵،  $z - 3$ ،  $3y + 2$ ،  $52x - 1$ ،  $3y + 2$ ،  $z - 3$ ،  $2x - 1$  برابر با صفر باشد،  $z$ ،  $y$ ،  $x$  را محاسبه کنید.

۴۴) در داده‌های ۲۹، ۲۲، ۱۸، ۱۰، ۲۰، ۳۴، ۱۵، ۲۵، ۱۲، ۱۷، ۲۴، ۳۵ میانگین داده‌های بزرگتر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم چقدر است؟

۴۵) اگر میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_N$  برابر  $\bar{X}$  باشد، میانگین داده‌های  $x_1 + \bar{X}, x_2 + 2\bar{X}, \dots, x_N + N\bar{X}$  چقدر می‌شود؟

۴۶) احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده  $\frac{1}{4}$  است. چقدر احتمال دارد که فرزند اول و دوم این خانواده هم‌جنس باشند؟

۴۷) یک کارخانه دو محصول  $A$  و  $B$  را در دو کیفیت عالی ( $E$ ) و متوسط ( $M$ ) تولید می‌کند. جدول زیر درصد تولید هر یک از محصولات را نشان می‌دهد. مطلوبست:

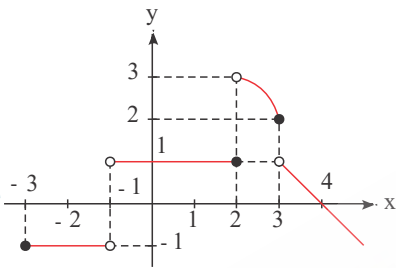
کیفیت	$E$	$M$
محصول		
$A$	۵۵%	۱۰%
$B$	۳۰%	۵%

- الف- اگر محصول از نوع  $A$  باشد، با کدام احتمال دارای کیفیت متوسط ( $M$ ) است؟  
 ب- اگر محصول از نوع  $B$  باشد، کدام احتمال دارای کیفیت عالی ( $E$ ) است؟  
 پ- اگر محصولی عالی ( $E$ ) باشد، با کدام احتمال از نوع  $A$  است؟  
 ت- اگر محصولی متوسط ( $M$ ) باشد، با کدام احتمال از نوع  $B$  است؟  
 ث- احتمال این‌که محصولی دارای کیفیت عالی ( $E$ ) و یا از نوع  $B$  باشد؟

۴۸) یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و عدد ظاهر شده مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که عدد ظاهر شده زوج باشد، چقدر است؟

۴۹) اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-2|}{x-1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد،  $a$  را بدست آورید.

۵۰) نمودار تابع  $f$  بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

ث)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

چ)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

ح)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

خ)  $f(-3)$

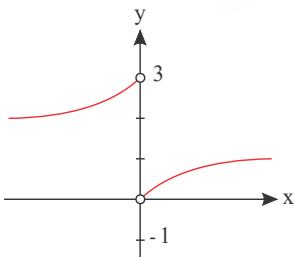
د)  $f(2)$

ذ)  $f(3)$

ر)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ز)  $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$

۵۱) شکل زیر، نمودار تابع  $f$  است.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  را محاسبه کنید.



۵۲) از دو معادله  $\log_3 x + \log_3 y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$  مقدار  $\log_4(x + y)$  را بدست آورید.

۵۳) نمودار تابع‌های  $y = 2^x + 1$ ,  $y = 2^{(x+3)}$ ,  $y = 2^{(x-2)} - 2$ ,  $y = 3 - 2^x$  و  $y = 2^{-x} - 4$  را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

۵۴) اگر نمودار تابع  $f(x) = ab^x - 1$  از دو نقطه  $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  $B(1, 1)$  بگذرد، مقدار  $f(-1)$  را بیابید.

۵۵) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) 
$$\frac{3 \sin 15^\circ - \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + \cos 30^\circ}{\cot(-135^\circ) - \sqrt{3} \tan \frac{5^\circ}{6}}$$

ب) 
$$\frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \times \tan \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{3}}{\cos^2(\frac{7\pi}{4}) + \cot^2(\frac{4\pi}{3})}$$

پ) 
$$2 \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 7 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

ت) 
$$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) + \tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

ث) 
$$\sqrt{3} \cot \frac{7\pi}{3} + 2 \sin \frac{20\pi}{3} + 2 \cos \frac{5\pi}{3} \times \tan \frac{50\pi}{3}$$

ج) 
$$\frac{\tan 12^\circ \cos 21^\circ - \sin 225^\circ \cos 315^\circ}{\cot 135^\circ \sin 33^\circ - \cos 24^\circ \tan 225^\circ}$$

چ) 
$$3 \tan \frac{29\pi}{6} - \sin \frac{39\pi}{4} + \cos \frac{27\pi}{4} - \cot \frac{34\pi}{3}$$

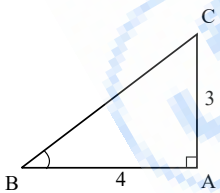
ح) 
$$5 \sin^2(\frac{7\pi}{4}) + 2 \tan^2(\frac{4\pi}{3}) + 3 \cos(\frac{8\pi}{3}) - \cot^2(\frac{7\pi}{6})$$

۵۶) اگر  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ربع سوم باشد، آنگاه  $\tan \theta$  چقدر است؟

۵۷) اگر  $\tan x = -\frac{1}{2}$  و  $\cos x < 0$  باشد، مقدار  $\sin x$  را به دست آورید.

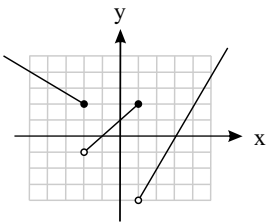
۵۸) اگر  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  و  $\cos \alpha < 0$  باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را بدست آورید.

۵۹) در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $B$  را بدست آورید.



۶۰) نمایش جبری تابع  $f$  را بنویسید در صورتی که تابع  $f$  خطی باشد و از نقاط  $(2, 5)$  و  $(-1, -7)$  بگذرد.

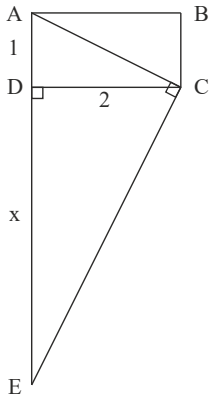
۶۱) ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید.



۶۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه  $\frac{49}{121}$  است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ چند

سانتی‌متر است؟

۶۳ در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک مستطیل را در نقطه  $E$  قطع کند. مقدار  $x$  را بدست آورید.



۶۴ فرض می‌کنیم  $g(x) = 4^x + 2$ .

الف)  $g(-1)$  را بدست آورید.

ب) اگر  $g(x) = 66$  باشد، مقدار  $x$  چقدر است؟

۶۵ اگر واریانس داده‌های  $5 - \frac{1}{2}x_1 + 5, \dots, 5 - \frac{1}{2}x_N + 5$  برابر ۳ باشد، واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_N$  را بدست آورید.

۶۶ اگر میانگین داده‌های  $1, a, a, a, a, a + 1$  برابر  $\frac{3a}{2}$  باشد، میانگین داده‌های  $4, a + 3, a + 2, a + 1, a$  را بدست آورید.

۶۷ اگر میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_N$  برابر ۸ باشد میانگین داده‌های  $4 + 3x_1, 4 + 3x_2, \dots, 4 + 3x_N$  را محاسبه کنید.

۶۸ اگر میانگین ۹ داده برابر ۱۸ و میانگین ۶ داده دیگر برابر ۱۳ باشد، میانگین کل ۱۵ داده را حساب کنید.

۶۹ احتمال این‌که فرهاد در کنکور قبول شود ۰٫۷ و احتمال این‌که بابک در کنکور قبول شود ۰٫۸ است. مطلوبست احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها در کنکور قبول شود.

۷۰ احتمال زنده بودن مردی تا ۲۰ سال آینده  $\frac{1}{5}$  و احتمال زنده بودن همسر او تا ۲۰ سال آینده  $\frac{1}{4}$  است. مطلوبست احتمال آن‌که:

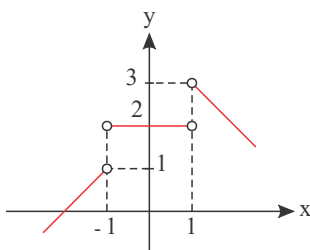
الف- هر دو تا ۲۰ سال آینده زنده باشند.

ب- فقط یک نفر از آن‌ها زنده باشند.

۷۱ اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 2 \\ x^2 + 1, & x < 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  پیوستگی چپ داشته باشد،  $f(2)$  را بدست آورید.

۷۲ پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} |x + 3|, & x \neq -3 \\ 3, & x = -3 \end{cases}$  را در نقطه  $x = -3$  بررسی کنید.

۷۳ با توجه به شکل زیر مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  را بدست آورید.



۷۴ اگر  $\log \frac{2}{x} + \log(x + 1) = 1$  باشد، مقدار  $\log_8 x$  را بیابید.



۷۵) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف)  $\log_x(x^2 + x) = \log_x 6$

ب)  $\log_9 x^2 + 7x + 7 = 0$

پ)  $\log_x(x^3 + 3x - 6) = 3$

ت)  $\log_8(x + 1)^3 + 2\log_8 x = 1$

ث)  $\log_{12}(x - 2) + \log_{12}(x + 2) = 1$

ج)  $\log 3x - \log 4 = \log(7 - x)$

چ)  $\log_3 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_2 x$

۷۶) اگر  $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{e}} 32$  را بدست آورید.

۷۷) اگر  $\log_4 4^x = x^3$  باشد، مقدار  $\log_{\frac{1}{2}} x$  را بدست آورید.

۷۸) اگر  $7y - x = 12$ ،  $\log_y x = 2$  باشد،  $x$  و  $y$  را بدست آورید.

۷۹) لگاریتم  $x$  در مبنای ۸ برابر  $\frac{4}{3}$  است،  $\sqrt{x}$  را بدست آورید.

۸۰) لگاریتم عدد  $x$  در مبنای ۱۶ برابر  $\frac{1}{8}$  است،  $x$  را بدست آورید.

۸۱) هر یک از اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف)  $\log_3 20$

ب)  $\log_{\frac{1}{4}} 40$

پ)  $\log_{\frac{1}{2}} 100$

ت)  $\log_{\sqrt{3}} 8$

ث)  $\log_{\frac{1}{3}} 60$

۸۲) نمودار تابع  $y = \log x$  را ۴ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید.

۸۳) تابع با ضابطه  $f(x) = 2^{-(x+b)} + c$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۴- قطع می‌کند. ضابطه تابع

را بدست آورده و سپس  $f(-2)$  را بدست آورید.

۸۴) معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $8^{3y} = 16$

ب)  $4 \times 2^{x+1} = (0.5)^x$

پ)  $8^{2x} = 2 \times 4^{x+1} \times 2^{2x-1}$

ت)  $8^{x^2} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \times 16^x$

ث)  $2^{3n-2} = \frac{1}{32^2}$

ج)  $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

چ)  $4^{3x+3} = \frac{1}{64^3}$

۸۵) اگر نمودار تابع  $f(x) = ab^x - 3$  از دو نقطه  $A(2, 6)$  و  $B(1, 0)$  بگذرد، مقدار  $f(-1)$  را بیابید.



۸۶ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

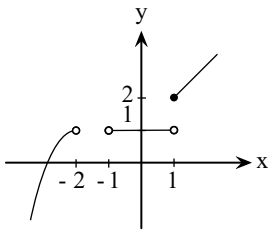
$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^{\geq -2} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -1} \\ f(x) = x^2 + 4x + 3 \end{cases}$$

۸۷ اگر در یک مثلث طول دو ضلع ۳ و ۴ و زاویه‌ی بین دو ضلع  $45^\circ$  باشد، مساحت مثلث را بدست آورید.

۸۸ اگر در یک مثلث  $AB = 4$  و  $AC = 5$  و  $\hat{A} = 60^\circ$  باشد مساحت مثلث  $ABC$  را بدست آورید.

۸۹ پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} & x > 3 \\ 2 & x = 3 \\ 5x - 13 & x < 3 \end{cases}$  را در نقطه‌ای به طول  $x = 3$  بررسی کنید. در مورد پیوستگی تابع  $f$  در سایر نقاط چه می‌توان گفت؟

۹۰ با توجه به نمودار داده‌شده، درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.



الف) حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  برابر ۲ است.

ب) حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  برابر ۱ است.

پ) حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  برابر ۲ است.

ت) حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  برابر ۱ است.

# پاسخنامه تشریحی

۱

$$\text{زمان ویرایش رضا} = x \quad \text{زمان ویرایش دو نفر} = 1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

سرعت ویرایش دو نفر = سرعت ویرایش رضا + سرعت ویرایش علی

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow \boxed{x = 4} \text{ ساعت}$$

۲

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - 13}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow OM = 13$$

۳

الف)  $L: 2x + y = 5 \rightarrow 2x + y - 5 = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(7) + 1(-4) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d = \sqrt{5}$$

ب)  $T: x = 5 \rightarrow x - 5 = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(7) + 0(-4) - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{2}{1} \rightarrow d = 2$$

پ)  $\Delta: y = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 \times 7 + 1(-4) + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{1} \rightarrow d = 4$$

۴

$y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$ ,  $a = -\frac{1}{9} < 0 \rightarrow$  تابع نقطه‌ی max دارد

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{6}{\frac{2}{9}} \rightarrow \boxed{x = 27}$$

$$y = -\frac{1}{9}(27)^2 + 6(27) = -3 \times 27 + 6 \times 27 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

روش دوم  $y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(6^2 - 4(-\frac{1}{9})(0))}{4(-\frac{1}{9})} = \frac{-36}{-\frac{4}{9}} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

۵

$a = m - 1$ ,  $b = m - 4$ ,  $c = -3m$

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و قرینه  $\rightarrow \begin{cases} b = 0 \rightarrow m - 4 = 0 \rightarrow \boxed{m = 4} \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$$\rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \\ x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -2} \end{cases}$$

۶

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مساوی (مضاعف) مثبت است.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 \rightarrow \Delta = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2 > 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{-1} = 1 > 0$$

$$y = \sqrt{3}x + 2 \rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, b = -1, c = 2$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\div(-\sqrt{3})} \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, b = -1, c' = -2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-2\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} \rightarrow \boxed{d = 1 + \sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} P(0) = 3 \\ \frac{-b}{a} = -4 \\ P(-4) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = \lambda a \\ 16a - 4b + c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - \lambda a = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3\lambda a = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$$

$$-16a = -5 \rightarrow \boxed{a = \frac{5}{16}}, \boxed{b = \frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 3}$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{x_A - 3}{2} \rightarrow -8 = x_A - 3 \rightarrow \boxed{x_A = -5} \rightarrow \boxed{A(-5, 0)}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{y_A + 2}{2} \rightarrow 2 = y_A + 2 \rightarrow \boxed{y_A = 0}$$

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}, \quad AB = 2R \rightarrow 2\sqrt{13} = 2R \rightarrow R = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow O(4, 1) \text{ مرکز دایره}$$

$$\text{ب) } OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow$  نقطه  $C$  روی محیط دایره قرار دارد

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow D_f = D_g$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\text{ب) } f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad x + 2 = 0 \rightarrow x \neq -2 \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$\rightarrow D_f \neq D_g \rightarrow$  دو تابع برابر نیستند

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

7

8

9

10

11

12

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin(x + \frac{\pi}{6}) = a \sin(0 + \frac{\pi}{6}) = \frac{a}{2}, f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

۱۳

$$f(1) = 5 \rightarrow (1, 5) \in f, (5, 1) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(9) = 3 \rightarrow (9, 3) \in f^{-1}, (3, 9) \in f$$

$$\xrightarrow{f} (1, 5), (3, 9) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = ax + b$$

$$\rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(1,5)} 5 = 2(1) + b \rightarrow b = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 2x + 3}$$

$$\rightarrow y = 2x + 3 \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = |x| \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$\rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$  دو تابع  $f$  و  $g$  برابر نیستند

۱۴

$$x^2 - 5x = 24 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x - 8)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow x - 8 = 0 \rightarrow \boxed{x = 8}, x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3}$$

۱۵

**الف**

منحنی رو به بالا  $\rightarrow a > 0$

جمع دو ریشه  $= -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$

**ب**

$c = 0$  عرض محل برخورد نمودار با محور  $y$

۱۶

چون مشخص نیست چه رئوسی روبه‌روی هم‌اند، پس حتماً باید نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم. **۱۷**

باید نشان دهیم:

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AB = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (2 + 13)^2} = \sqrt{289} = 17$$

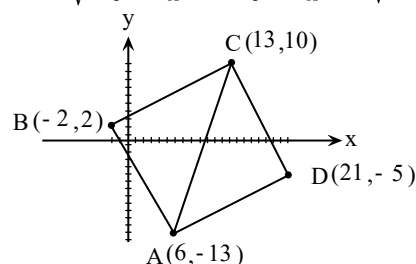
$$BC = \sqrt{(13 + 2)^2 + (10 - 2)^2} = 17$$

$$CD = \sqrt{(21 - 13)^2 + (-5 - 10)^2} = 17$$

$$DA = \sqrt{(6 - 21)^2 + (-13 + 5)^2} = 17$$

اما یک لوزی هم چهار ضلع برابر دارد. حال کافی است رابطه فیثاغورس را برای مثلث  $ABC$  تحقیق کنیم و نشان دهیم مثلث  $ABC$  در زاویه  $B$  قائمه است و این یعنی  $ABCD$  مربع است.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(13 - 6)^2 + (10 + 13)^2} = \sqrt{578}$$



رأسی (تجزیه) آزاد هم

فیثاغورس:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow 578 = 289 + 289 \rightarrow 578 = 578$

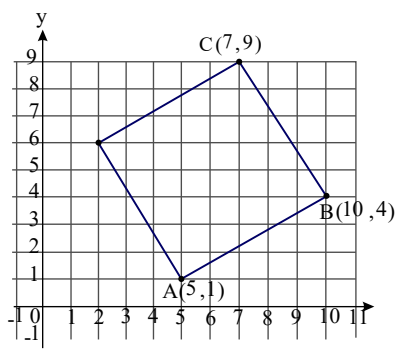
الف)  $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} \rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$

ب)  $AB \perp AD \rightarrow m_{AD} \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m_{AD} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = \frac{-5}{3}$

$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 + 7 = 10 + x_D \\ 1 + 9 = 4 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$

پ) مربع نوعی از متوازی‌الاضلاع است و داریم:

ت)



الف) 
$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \rightarrow 10 = x_A + 7 \rightarrow x_A = 3 \\ y_N &= \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{y_A - 2}{2} \rightarrow -8 = y_A - 2 \rightarrow y_A = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, -6)$$

ب) قرینه نقطه C نسبت به نقطه M نقطه D است، بطوری که M وسط پاره خط DC است.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_C + x_D}{2} \rightarrow -1 = \frac{1 + x_D}{2} \rightarrow -2 = 1 + x_D \rightarrow x_D = -3 \\ y_M &= \frac{y_C + y_D}{2} \rightarrow 4 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow 8 = 2 + y_D \rightarrow y_D = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(-3, 6)$$

$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{AP}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{AP = 4}$

$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{PQ}{9} \rightarrow \boxed{PQ = \frac{18}{5}}$

الف)  $a(8 + b) = b(10 + a) \rightarrow 8a + ab = 10b + ab \rightarrow 8a = 10b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{8} \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{5}{4}}$

ب)  $(3a + 10)(7 + 2b) = (3b + 7)(10 + 2a)$   
 $\rightarrow 21a + 6ab + 70 + 20b = 30b + 6ab + 70 + 14a$

$\rightarrow 21a - 14a = 30b - 20b \rightarrow 7a = 10b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{10}{7}}$

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)}$$
  

$$= \frac{\sin 20^\circ - (-\cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}$$
  

$$= \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{0,36 + 1}{-0,36 + 1} = \frac{1,36}{0,64} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{2}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{x} \\ y = 3 \cot \alpha \rightarrow \cot \alpha = \frac{y}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \quad \boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1}$$

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

تابع  $f$  یک به یک وارون پذیر است و داریم:  $f = \{(1, 4), (2, 7), (6, 9), (5, 12)\}$

$$f^{-1} = \{(4, 1), (7, 2), (9, 6), (12, 5)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 9), (7, -1), (5, 9)\}$$

تابع  $g$  یک به یک نیست زیرا به ازای  $y = 9$  دو مقدار  $x = 4$  و  $x = 5$  داریم. بنابراین تابع  $g$  وارون پذیر نیست.

الف)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

ب)  $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$

پ)  $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ت)  $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$

ث)  $4 \times \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = 2 + \sqrt{3}$

$$\frac{AB}{A'B'} = K \rightarrow \frac{5}{20} = K \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K \rightarrow \frac{5 + 7 + 11}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P_{\triangle A'B'C'} = 92 \text{ cm}}$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow \boxed{a = 1}, \boxed{b = 1}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = x^2 + x - 2}$$

$$\rightarrow u^2 - 17u + 52 = 0 \rightarrow (u - 13)(u - 4) = 0$$

$$\begin{aligned} u = 13 &\rightarrow 3x^2 + 1 = 13 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ u = 4 &\rightarrow 3x^2 + 1 = 4 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = -5$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{2+2}{-\Delta+2+1} = \frac{\Delta}{-1} = -\Delta$$

۳۱

$$y = 2x \rightarrow C(\alpha, 2\alpha), A(1, 1), B(2, -1)$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (2\alpha+1)^2}$$

$$\rightarrow (\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2 = (\alpha-2)^2 + (2\alpha+1)^2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + \cancel{4\alpha^2} - 4\alpha + 1 = \cancel{\alpha^2} - 4\alpha + 4 + \cancel{4\alpha^2} + 4\alpha + 1$$

$$\rightarrow 2 - 6\alpha = 10 - 2\alpha \rightarrow 2 - 10 = 6\alpha - 2\alpha \rightarrow -8 = 4\alpha \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow C(-2, -4)$$

۳۲

$$\begin{cases} (0, -3) \\ (2, 0) \\ (-1, 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ a - b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - b = 7 \end{cases}$$

$$4a = 8 \rightarrow a = 2, b = -5$$

۳۳

دور ریشه‌ی حقیقی متمایز  $\rightarrow \Delta > 0$ ,  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = m + 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(m+3) \rightarrow \Delta = 16 - 4m - 12 > 0$$

$$\rightarrow 4 - 4m > 0 \rightarrow 4 > 4m \rightarrow 1 > m$$

۳۴

دو ریشه‌ی مساوی  $\rightarrow \Delta = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b = -(m+1)$ ,  $c = 2m - 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(m+1))^2 - 4(1)(2m-1) \rightarrow \Delta = m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \rightarrow (m-5)(m-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m-5=0 \rightarrow m=5 \\ m-1=0 \rightarrow m=1 \end{cases}$$

۳۵

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y - 2x = 11 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3y - 2x = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7y = 21 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow x + 2(3) = 5 \rightarrow x = -1$$

محل تلاقی دو خط  $A(-1, 3)$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} \rightarrow OA = \sqrt{10}$$

۳۶

الف

$$\begin{cases} D_f = [-4, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} - \{4\} \end{cases} \rightarrow D_f \cap D_g = [-4, +\infty) - \{4\} \quad (1)$$



$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \quad (2)$$

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 0 \rightarrow x = -2 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) : D_{\frac{f}{g}} = [-4, +\infty) - \{-2, 4\}$$

ب

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} \quad (2')$$

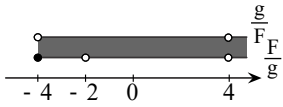
$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x+4} = 0 \rightarrow x = -4 \quad (3')$$

$$(1), (2)', (3') : D_{\frac{g}{f}} = (-4, +\infty) - \{4\}$$

پ



در این حالت هر یک از توابع  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{g}{f}$  خود حکم دو تابع هستند و دامنه جمع آن‌ها، همان دامنه اشتراک آن‌ها است.



$$D_{\frac{f}{g} + \frac{g}{f}} = D_{\frac{f}{g}} \cap D_{\frac{g}{f}} = (-4, +\infty) - \{-2, 4\}$$

ت

$$(2f - g)(5) = 2f(5) - g(5) = 2\sqrt{5+4} - \frac{5+2}{5-4} = 2 \times 3 - 7 = -1$$

فاصله هر دو کابین متوالی برحسب رادیان برابر است با:

$$\frac{\text{زاویه کل دایره برحسب رادیان}}{\text{تعداد کابین}} = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$$

فرض کنید کابین ۱،  $\frac{84\pi}{20}$  دوران کند، داریم:

$$\frac{84\pi}{20} = \frac{80\pi + 4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi \times 2}{20 \times 2} = 4\pi + 8 \times \frac{\pi}{40}$$

یعنی کابین ۱ در موقعیت کابین ۸ قرار می‌گیرد.

بنابراین کابین ۵ در موقعیت کابین  $13 = 8 + 5$  قرار می‌گیرد.

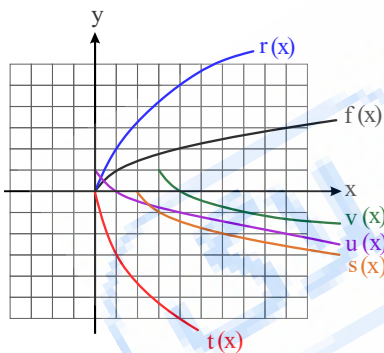
$$\frac{1}{5^2} = \sqrt{5} \quad \text{الف - گزاره صحیح است زیرا}$$

ب - گزاره صحیح نیست زیرا  $1^\circ = 1$  و محل تقاطع نمودار با محور  $y$ ها نقطه  $(0, 1)$  است.

پ - گزاره صحیح است زیرا دامنه هر دو تابع  $\mathbb{R}$  یا اعداد حقیقی است.

ت - گزاره صحیح نیست زیرا تابع نمایی با محور  $x$ ها محل تقاطع ندارد.

۳۹



$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0^-) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$f(0) = -2(0) + 2 = 0 - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0^+)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow$  تابع  $f$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است.

تابع  $f$  در نقاط دیگر به جز  $x = 0$  هم پیوسته است.

۴۰

۴۱

$$r = 10 \text{ cm} \quad \ell = 8 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{10} \rightarrow \alpha = 0,8 \text{ رادیان}$$

اگر انحراف معیار داده‌ها برابر صفر باشد، یعنی داده با هم برابرند.

۴۳

$$\begin{cases} 2x - 1 = 5 \rightarrow x = 3 \\ 3y + 2 = 5 \rightarrow y = 1 \\ z - 3 = 5 \rightarrow z = 8 \end{cases}$$

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم و داریم: (۴۴)

$$10, 12, 15 \quad 17, 18, 20 \quad 22, 24, 25 \quad 29, 34, 35$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Q_1=16 \quad Q_2=21 \quad Q_3=27$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{17 + 18 + 20 + 22 + 24 + 25}{6} = \frac{126}{6} \rightarrow \bar{X} = 21$$

(۴۵)

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_N = N\bar{X}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + \bar{X} + x_2 + 2\bar{X} + \dots + x_N + N\bar{X}}{N} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N) + (\bar{X} + 2\bar{X} + \dots + N\bar{X})}{N}$$

$$\rightarrow \bar{Y} = \frac{N\bar{X} + \frac{N(N+1)}{2}\bar{X}}{N} = \frac{N\bar{X}}{N} + \frac{N(N+1)}{2N}\bar{X} = \bar{X} + \frac{N+1}{2}\bar{X}$$

$$\rightarrow \bar{Y} = \frac{2 + N + 1}{2}\bar{X} \rightarrow \bar{Y} = \frac{N+3}{2}\bar{X}$$

(۴۶)

$A =$  پیشامد فرزند پسر و  $P(A) = \frac{1}{4}$

$A' =$  پیشامد فرزند دختر  $\rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\rightarrow P(\text{دو فرزند همجنس}) = P(\text{دو فرزند پسر}) + P(\text{دو فرزند دختر}) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{10}{16}$

$\rightarrow P(\text{دو فرزند همجنس}) = \frac{5}{8}$

(۴۷) الف-

$P(A) = 0.55 + 0.10 \rightarrow P(A) = 0.65$

$\rightarrow P(M|A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.10}{0.65} = \frac{10}{65} \rightarrow P(M|A) = \frac{2}{13}$

ب-

$P(B) = 0.30 + 0.05 \rightarrow P(B) = 0.35$

$\rightarrow P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.35} = \frac{30}{35} \rightarrow P(E|B) = \frac{6}{7}$

ب-

$P(E) = 0.55 + 0.30 \rightarrow P(E) = 0.85$

$\rightarrow P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.55}{0.85} = \frac{55}{85} \rightarrow P(A|E) = \frac{11}{17}$

ن-

$P(M) = 0.10 + 0.05 \rightarrow P(M) = 0.15$

$\rightarrow P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0.05}{0.15} = \frac{5}{15} \rightarrow P(B|M) = \frac{1}{3}$

ث-

$P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = 0.85 + 0.35 - 0.30 = 0.90$

$\rightarrow (E \cup B) = 0.90$

(۴۸)

$A =$  پیشامد آن‌که عدد تاس مضرب ۳ نباشد  $= \{1, 2, 4, 5\}$

$B =$  پیشامد آن‌که عدد تاس زوج باشد  $= \{2, 4, 6\}$  و  $A \cap B = \{2, 4\}$

$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} \rightarrow P(B|A) = \frac{1}{2}$

(۴۹)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x|x-2|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+(-x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)} = -2$$

$$, f(1) = a \rightarrow \boxed{a = -2}$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

ث)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

ج)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1$

۵۰ نمودار تابع  $f$  بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

چ)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -1$

ح)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$  وجود ندارد

خ)  $f(-3) = -1$

د)  $f(2) = 1$

ذ)  $f(3) = 2$

ر)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

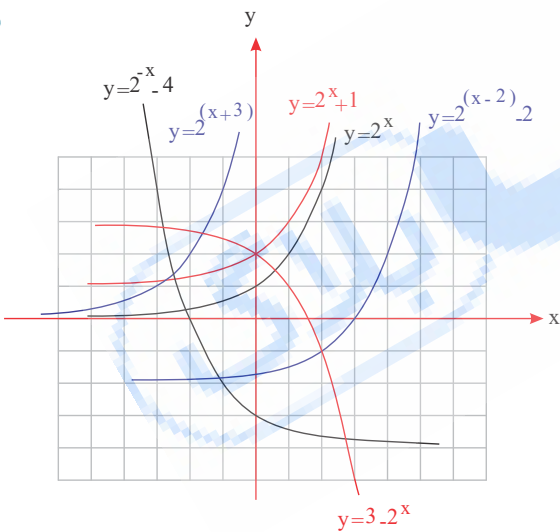
ز)  $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

$$\begin{cases} \log_7 x + \log_7 y = 2 \\ x^2 + y^2 = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_7 xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 49 \\ x^2 + y^2 = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 9 \\ x^2 + y^2 = 46 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \rightarrow (x+y)^2 = 46 + 2(9) \rightarrow (x+y)^2 = 64$$

$$\begin{cases} \boxed{x+y=8} \\ x+y=-8 \end{cases} \text{ غ} \rightarrow \log_7(x+y) = \log_7 8 = \log_7 2^3 = \frac{3}{2} \log_7 2 = \frac{3}{2} \rightarrow \log_7(x+y) = \frac{3}{2}$$



الف)  $y = 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ب)  $y = 2^x + 1 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (1, +\infty)$

پ)  $y = 2^{(x+3)} \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ت)  $y = 2^{(x-2)} - 2 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-2, +\infty)$

ث)  $y = 3 - 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-\infty, 3)$

ج)  $y = 2^{-x} - 4 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-4, +\infty)$

$$\begin{cases} A(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}) \rightarrow f(-\frac{1}{r}) = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = ab^{-\frac{1}{r}} - 1 \rightarrow ab^{-\frac{1}{r}} = \frac{3}{r} \\ B(1, 11) \rightarrow f(1) = 11 \rightarrow 11 = ab^1 - 1 \rightarrow ab = 12 \end{cases} \div \rightarrow b^{\frac{r}{r}} = \frac{12}{\frac{3}{r}} = 4r$$

$$\rightarrow b^{\frac{r}{r}} = 4r \rightarrow b^{\frac{r}{r}} = 2^r \rightarrow b^{\frac{1}{r}} = 2 \rightarrow \boxed{b = 4}, \boxed{a = 3}$$

۵۱

۵۲

۵۳

۵۴

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 3 \times 4^x - 1} \rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{f(-1) = -\frac{1}{4}}$$

$$\text{الف) } = \frac{3 \sin(180^\circ - 30^\circ) - \sqrt{3} \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(360^\circ - 60^\circ)}{-\cot(135^\circ) - \sqrt{3} \tan(\pi - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3 \sin 30^\circ - \sqrt{3}(-\cos \frac{\pi}{6}) + \cos(-60^\circ)}{-\cot(180^\circ - 45^\circ) - \sqrt{3}(-\tan \frac{\pi}{6})} = \frac{3 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3(\frac{1}{2}) + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) } = \frac{3 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \times \tan(2\pi - \frac{\pi}{6})}{\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3(-\sin \frac{\pi}{6}) \times \tan(\frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6})(-\tan \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cot^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{3(-\frac{1}{2})(1) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$\text{ج) } 2(-\sin \alpha) + 3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -2 \sin \alpha + 3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\text{د) } = -\cos \alpha - \cancel{\cot \alpha} + 3(-\cos \alpha) + \cancel{\cot \alpha} = -4 \cos \alpha$$

$$\text{هـ) } = \sqrt{3} \cot(\cancel{2\pi} + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(\cancel{2\pi} + \frac{2\pi}{3}) + 2 \cos(\cancel{2\pi} - \frac{\pi}{3}) \times \tan(\cancel{2\pi} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2(\sin \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times (-\tan \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}) + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2(\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$$

$$\text{و) } = \frac{\tan(180^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) - \sin(180^\circ + 45^\circ) \cos(360^\circ - 45^\circ)}{\cot(180^\circ - 45^\circ) \sin(360^\circ - 30^\circ) - \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan(180^\circ + 45^\circ)}$$

$$= \frac{-\tan 60^\circ (-\cos 30^\circ) - (-\sin 45^\circ) \cos 45^\circ}{-\cot 45^\circ (-\sin 30^\circ) - (-\cos 60^\circ) \tan 45^\circ} = \frac{(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(1)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ز) } = 3 \tan(\cancel{2\pi} + \frac{5\pi}{6}) - \sin(\cancel{2\pi} - \frac{\pi}{6}) + \cos(\cancel{2\pi} + \frac{2\pi}{3}) - \cot(\cancel{2\pi} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= 3 \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{6}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - \cot(\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= 3(-\tan \frac{\pi}{6}) + \sin \frac{\pi}{6} + (-\cos \frac{\pi}{6}) - \cot \frac{\pi}{3}$$

$$= 3(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح) } = 5 \sin^2(\cancel{2\pi} - \frac{\pi}{6}) + 2 \tan^2(\pi + \frac{\pi}{3}) + 3 \cos(\cancel{2\pi} + \frac{2\pi}{3}) - \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= 5\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + 2\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2 + 3\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\cot\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$= 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2(\sqrt{3})^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sqrt{3})^2$$

$$= 5\left(\frac{1}{3}\right) + 2(3) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{5}{3} + 6 - \frac{3}{2} - 3 = 4$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{5}{25} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{20}{25} \rightarrow \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = -\frac{1}{2}, \cos x < 0 \rightarrow 90^\circ < x < 180^\circ \text{ یا ناحیه دوم } x$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \rightarrow \cot x = -2$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ یا } \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \rightarrow \tan\alpha = \frac{-1}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \rightarrow \tan\alpha = \frac{-\sqrt{15}}{15}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} \rightarrow \cot\alpha = -\sqrt{15}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow BC^2 = 16 + 9$$

$$\rightarrow BC^2 = 25 \rightarrow BC = 5$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \sin\hat{B} = \frac{3}{5}, \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \cos\hat{B} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \tan\hat{B} = \frac{3}{4}, \cot\hat{B} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \cot\hat{B} = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f(-1) = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(2) + b = 5 \\ a(-1) + b = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 7 \end{cases} +$$

$$3a = 12 \rightarrow a = 4, b = -3$$

$$\rightarrow f(x) = 4x - 3$$

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow D_f = \mathbb{R}, y > -3 \rightarrow R_f = (-3, +\infty)$$

۵۶

۵۷

۵۸

۵۹

۶۰

۶۱

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, f_1(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ -5a + b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 5a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$-2\left(-\frac{2}{3}\right) + b = 2 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, f_2(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow f_2(x) = x + 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, f_3(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2, b = -6$$

$$\rightarrow f_3(x) = 2x - 6$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & x \leq -2 \\ x + 1, & -2 < x \leq 1 \\ 2x - 6, & 1 < x \end{cases}$$

٦٢

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = k^2 \rightarrow \frac{49}{121} = k^2 \rightarrow k = \frac{7}{11}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = k \rightarrow \frac{21}{A'B'} = \frac{7}{11} \rightarrow A'B' = 33 \text{ cm}$$

$\Delta ACE$  قائم الزاويه

$$\rightarrow AD \cdot DE = DC^2 \rightarrow 1 \times x = 2^2 \rightarrow x = 4$$

الف)  $g(-1) = 4^{-1} + 2 = \frac{1}{4} + 2 \rightarrow g(-1) = \frac{9}{4}$

ب)  $g(x) = 66 \rightarrow 4^x + 2 = 66 \rightarrow 4^x = 64 \rightarrow 4^x = 4^3 \rightarrow x = 3$

$$\sigma_x^2 = (-2)^2 \sigma_x^2 = 4 \times 3 \rightarrow \sigma_x^2 = 12$$

$$\frac{a + a + a + a + a + 1}{\Delta} = \frac{3a}{2} \rightarrow \frac{5a + 1}{\Delta} = \frac{3a}{2} \rightarrow 10a + 2 = 15a \rightarrow 2 = 15a - 10a$$

$$\rightarrow 2 = 5a \rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4}{\Delta} = \frac{5a + 10}{\Delta} \rightarrow \bar{X} = \frac{5a}{\Delta} + \frac{10}{\Delta}$$

$$\rightarrow \bar{X} = a + 2 = \frac{2}{5} + 2 \rightarrow \bar{X} = \frac{12}{5}$$

$$\bar{x} = 3(8) + 4 \rightarrow \bar{x} = 28$$

$$\bar{x} = \frac{n\bar{x}_1 + m\bar{x}_2}{n + m} = \frac{9 \times 18 + 6 \times 13}{9 + 6} = \frac{240}{15} \rightarrow \bar{x} = 16$$

٦٣

٦٤

٦٥

٦٦

٦٧

٦٨

٦٩

پیشامد قبول شدن بابک در کنکور =  $B$  ، پیشامد قبول شدن فرهاد در کنکور =  $A$

$B$  و  $A$  مستقل هستند  $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{8}{10} + \frac{7}{10} - \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{94}{100}}$$

الف- ۷۰

پیشامد زنده بودن زن تا ۲۰ سال آینده =  $B$  ، پیشامد زنده بودن مرد تا ۲۰ سال آینده =  $A$

$$\text{دو پیشامد مستقل هستند} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{20}}$$

ب-

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{P(A') = \frac{4}{5}}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A) \cdot P(B') + P(B) \cdot P(A') = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cap B') + P(B \cap A') = \frac{7}{20}}$$

۷۱

$$x = 2 \text{ در پیوستگی چپ} \rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 5 \rightarrow \boxed{f(2) = 5}$$

۷۲

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)} |x + 3| = 0, \quad f(-3) = 3$$

تابع  $f$  در  $x = -3$  پیوسته نیست.

۷۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۷۴

$$\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1 \rightarrow \log\left(\frac{2}{x}(x+1)\right) = \log 10 \rightarrow \frac{2x+2}{x} = 10$$

$$\rightarrow 2x + 2 = 10x \rightarrow 2 = 10x - 2x \rightarrow 2 = 8x \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \log_8 x = \log_8 \frac{1}{4} = \log_{8^{\frac{1}{3}}} 2^{-2} = \frac{-2}{3} \log_8 2 = \frac{-2}{3} \rightarrow \boxed{\log_8 x = -\frac{2}{3}}$$

۷۵

$$\text{الف) } \log_x(x^2 + x) = \log_x 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x=-3 \text{ غ} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \log_9 x^2 + 7x + 7 = 0 \rightarrow x^2 + 7x + 7 = 9 \rightarrow x^2 + 7x + 7 = 9$$

$$\rightarrow x^2 + 7x + 7 = 9 \rightarrow (x+6)(x+1) = 9 \begin{cases} x+6=9 \rightarrow \boxed{x=-6} \\ x+1=9 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

$$\text{پ) } \log_x(x^2 + 3x - 6) = 3 \rightarrow x^2 + 3x - 6 = x^3 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\text{ت) } \log_8(x+1)^2 + 2\log_8 x = 1 \rightarrow \log_{8^{\frac{1}{3}}}(x+1)^2 + \log_{8^{\frac{1}{3}}} x = 1$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} \log_8(x+1) + \frac{1}{3} \log_8 x = \log_8 2 \rightarrow \log_8(x+1)^2 x = \log_8 2 \rightarrow x(x+1) = 2$$

$$\rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \begin{cases} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \text{ غ} \end{cases}$$

$$\text{ث) } \log_{17}(x-2) + \log_{17}(x+2) = 1 \rightarrow \log_{17}((x-2)(x+2)) = \log_{17} 17$$

$$\rightarrow \log_{17}(x^2 - 4) = \log_{17} 17 \rightarrow x^2 - 4 = 17 \rightarrow x^2 = 21 \begin{cases} \boxed{x=4} \\ x=-4 \text{ غ} \end{cases}$$



ج)  $\log 3x - \log 2 = \log(3x - 2) \rightarrow \log f\left(\frac{3x}{2}\right) = \log(3x - 2)$

$\rightarrow \frac{3x}{2} = 3x - 2 \rightarrow 3x = 2(3x - 2) \rightarrow 3x = 6x - 4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$

ح)  $\log_2 \sqrt{3} + \log_3 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_2 3 + \log_3 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{2} \log_3 5 = \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{2} \log_3 5 = \frac{1}{2} \log_2 3$

$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log_2 3 \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \log_2 3 \rightarrow \log_2 3 = 2 \rightarrow 3 = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A \rightarrow \sqrt[5]{e^2} = 2^A \rightarrow e^{\frac{2}{5}} = 2^A \rightarrow (e^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} = (2^A)^{\frac{5}{2}}$

$\rightarrow \boxed{e = 2^{\frac{5A}{2}}} \rightarrow \sqrt{e} = (2^{\frac{5A}{2}})^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{e} = 2^{\frac{5A}{4}}$

$\rightarrow \log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{2^{\frac{5A}{4}}} 2^5 = \frac{5}{\frac{5A}{4}} \log_2 2 = \frac{4}{A} \log_2 2 = \frac{4}{A} \rightarrow \boxed{\log_{\sqrt{e}} 32 = \frac{4}{A}}$

$\log_2 2^x = \log_2 2^{2x} = 2x \log_2 2 = 2x \rightarrow 2x = x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = \log_{2^{-1}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} \log_2 2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{2}}$

$\begin{cases} \log_y x = 2 \rightarrow x = y^2 \rightarrow 2y - y^2 = 12 \rightarrow y^2 - 2y + 12 = 0 \\ 2y - x = 12 \end{cases}$

$(y - 2)(y - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \rightarrow y = 2, x = 4 \\ y - 6 = 0 \rightarrow y = 6, x = 36 \end{cases}$

$\log_8 x = \frac{2}{3} \rightarrow x = 8^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = (2^3)^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 4} \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4} \rightarrow \boxed{\sqrt{x} = 2}$

$\log_{16} x = \frac{1}{8} \rightarrow x = 16^{\frac{1}{8}} \rightarrow x = (2^4)^{\frac{1}{8}} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}$

الف)  $\log_2 20 \rightarrow \log_2 9 < \log_2 20 < \log_2 27 \rightarrow 2 < \log_2 20 < 3$

ب)  $\log_{\frac{1}{2}} 40 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 64 < \log_{\frac{1}{2}} 40 < \log_{\frac{1}{2}} 16 \rightarrow -3 < \log_{\frac{1}{2}} 40 < -2$

پ)  $\log_{\frac{1}{2}} 100 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 128 < \log_{\frac{1}{2}} 100 < \log_{\frac{1}{2}} 64 \rightarrow -7 < \log_{\frac{1}{2}} 100 < -6$

ت)  $\log_{\sqrt{2}} 8 \rightarrow \log_{\sqrt{2}} 3\sqrt{3} < \log_{\sqrt{2}} 8 < \log_{\sqrt{2}} 9 \rightarrow 3 < \log_{\sqrt{2}} 8 < 4$

ث)  $\log_{\frac{1}{2}} 60 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 81 < \log_{\frac{1}{2}} 60 < \log_{\frac{1}{2}} 27 \rightarrow -4 < \log_{\frac{1}{2}} 60 < -3$

$y = \log x \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} y = \log(x - 4) \xrightarrow{\text{واحد به سمت بالا}} y = \log(x - 4) + 3$

$\begin{cases} (-1, 0) \rightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(0) = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{-(-1+b)} + c = 0 \\ 2^{-(0+b)} + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{1-b} + c = 0 \\ 2^{-b} + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{1-b} = -c \\ 2^{-b} + c = -4 \end{cases}$

$\rightarrow 2^{1-b} = 2^{-b} + 4 \rightarrow 2(2^{-b}) = (2^{-b}) + 4$

$\rightarrow 2(2^{-b}) - (2^{-b}) = 4 \rightarrow 2^{-b} = 4 \rightarrow 2^{-b} = 2^2 \rightarrow -b = 2 \rightarrow \boxed{b = -2}$

۷۶

۷۷

۷۸

۷۹

۸۰

۸۱

۸۲

۸۳

رابطی (تجزیی) از دهم

$$\rightarrow 2^{1-(-2)} = -c \rightarrow 2^3 = -c \rightarrow \lambda = -c \rightarrow \boxed{c = -\lambda} \rightarrow \boxed{f(x) = 2^{-(x-2)} - \lambda}$$

$$f(-2) = 2^{-(-2-2)} - \lambda \rightarrow f(-2) = 2^4 - \lambda \rightarrow \boxed{f(-2) = \lambda}$$

۸۴

الف)  $\lambda^{xy} = 16 \rightarrow (2^x)^{xy} = 2^4 \rightarrow 2^{xy} = 2^4 \rightarrow xy = 4 \rightarrow \boxed{y = \frac{4}{x}}$

ب)  $4 \times 2^{x+1} = (5/2)^x \rightarrow 2^2 \times 2^{x+1} = (2^{-1})^x \rightarrow 2^{x+3} = 2^{-x}$   
 $\rightarrow x + 3 = -x \rightarrow 2x = -3 \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

پ)  $\lambda^{2x} = 2 \times 2^{x+1} \times 2^{2x-1} \rightarrow (2^x)^{2x} = 2 \times (2^x)^{x+1} \times 2^{2x-1}$   
 $\rightarrow 2^{2x} = 2 \times 2^{x+1} \times 2^{2x-1} \rightarrow 2^{2x} = 2^{2x+2} \rightarrow 2x = 2x+2 \rightarrow 2x - 2x = 2 \rightarrow 0 = 2 \rightarrow \boxed{x = 1}$

ت)  $\lambda^{2x} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \times 16^x \rightarrow (2^x)^{2x} = \frac{1}{2} \times (2^4)^x \rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \times 2^{4x} \rightarrow 2^{2x} = 2^{-1+4x}$   
 $\rightarrow 2x = -1 + 4x \rightarrow 2x - 4x = -1 \rightarrow -2x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

ث)  $2^{3n-2} = \frac{1}{32^2} \rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{(2^5)^2} \rightarrow 2^{3n-2} = 2^{-10} \rightarrow 3n - 2 = -10 \rightarrow 3n = -10 + 2 \rightarrow 3n = -8 \rightarrow \boxed{n = -\frac{8}{3}}$

ج)  $9^{xy-3} = 27^{y+1} \rightarrow (3^2)^{xy-3} = (3^3)^{y+1} \rightarrow 3^{2xy-6} = 3^{3y+3} \rightarrow 2xy - 6 = 3y + 3$   
 $\rightarrow 2xy - 3y = 9 \rightarrow y(2x - 3) = 9 \rightarrow \boxed{y = 3}$

د)  $4^{2x+3} = \frac{1}{64^2} \rightarrow 2^{2x+3} = \frac{1}{(2^6)^2} \rightarrow 2^{2x+3} = 2^{-12}$   
 $2x + 3 = -12 \rightarrow 2x = -15 \rightarrow x = -\frac{15}{2}$

۸۵

$$\begin{cases} A(2, 6) \rightarrow f(2) = 6 \rightarrow ab^2 - 3 = 6 \rightarrow ab^2 = 9 \\ B(1, 0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow ab - 3 = 0 \rightarrow ab = 3 \end{cases} \div \boxed{b = 3}, \boxed{a = 1}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 3^x - 3} \rightarrow f(-1) = 3^{-1} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = \frac{1-27}{3} \rightarrow \boxed{f(-1) = \frac{-26}{3}}$$

۸۶ تابع درجه دوم یک به یک و وارون پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع سهمی از نیمه‌ی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون پذیر است.

$$y = x^2 + 4x + 3 \rightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 1 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 1$$

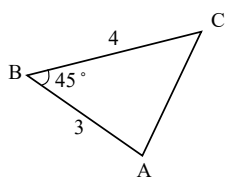
$$\rightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = x + 2 \rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y+1} - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -2} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2 \end{cases}$$

۸۷

$$a = 4, c = 3, \hat{B} = 45^\circ \rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{2}}$$



۸۸

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{S_{\Delta ABC} = 5\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

$x \rightarrow 3^+$ ، پس عبارت درون قدر مطلق و خود عبارت بدون قدر مطلق بیرون می‌آید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (\Delta x - 13) = 2, f(3) = 2$$

بنابراین تابع در نقطه  $x = 3$  پیوسته است. تابع  $f$  در سایر نقاط نیز پیوسته است. تابع در سایر نقاط نیز پیوسته است. چرا که نمودار تابع در هر یک از ضابطه‌ها پیوسته و بدون بریدگی یا قطع‌شدگی است.

۹۰

الف درست

ب درست

پ

حد ندارد  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

نادرست؛ چون مقادیر حد چپ و حد راست در نقطه با هم برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه حد ندارد، یعنی:

ت

نادرست؛ چون تابع به ازای مقادیر بزرگ‌تر از  $-2$  (یعنی  $(-2)^+$ ) تعریف نشده است، پس تابع در این نقطه حد ندارد.