نام و نام خانوادگی:　　　　　　　　　　زمان برگزاری: ۱۳۶۸۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی گسسته دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱) ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.

۲) اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است.

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۳) به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۴) ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح $c, b, a$ و عدد طبیعی $m$، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۵) برای هر سه عدد حقیقی $x, y, z$ ثابت کنید:

$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$

۶) با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱، ۱ چند عدد ۹رقمی می‌توان نوشت؟

۷) اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۸) ثابت کنید اگر $a = bq + r$ آنگاه $(a\ ,\ b) = (b, r)$

۹) در یک تقسیم مقسوم‌علیه برابر ۱۷ باقیمانده برابر ۳ می‌باشد حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت ، مقسوم علیه تغییر کنند؟

۱۰) فرض کنید تابع $f$ در $x = a$ پیوسته باشد ولی تابع $g$ در $x = a$ پیوسته نباشد ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۱۱) گرافی ساده و ۳-منتظم چنان رسم کنید که دوری به طول ۳ نداشته باشد.

۱۲) با ۷ رأس $a, b, c, d, e, f, g$ چند گراف ساده می‌توان ساخت به‌طوری که همسایگی باز رأس $a$ حداقل ۴ عضو داشته باشد؟

۱۳) باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۲۷)^۷ + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۴) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

۱۵) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۱۶) ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

۱۷) به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۱۸) دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.

۱۹) به چند طریق می‌توان، ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۲۰) می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولیدشدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شاملِ ۹ حرفِ $a, a, b, a, c, c, d, d, d$، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۲۱) اگر داشته باشیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از $A$ و سه رقم از $B$ باشد؟

۲۲) می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند، در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیلی شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۳) در یک مهمانی با ۶۰ شرکت‌کننده ۳۰ نفر مرد و ۲۵ نفر سیاه‌پوست هستند. اگر ۳ مرد سیاه‌پوست در مهمانی باشند، چند زن غیر سیاه‌پوست وجود دارد؟

۲۴) در خانه‌های خالی اعدادی بنویسید که مربع لاتین ایجاد شود.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ۳ |
| | | ۴ | |
| | ۴ | | |
| ۳ | | | |

۲۵) در مربع لاتین زیر حاصل $2a+b$ چند است؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ۱ | |
| ۱ | | $a$ | ۳ |
| | $b$ | | |
| | ۲ | | ۱ |

۲۶) عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲۷) اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a$ یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۸) اگر $n$ عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$.

(راهنمایی: برای $n$ سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$.)

۲۹) اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید $a$ عددی اول است.

۳۰) اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

۳۱) گراف $P_{12}$ را رسم کنید.

الف) یک $\gamma$-مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶عضوی از آن را مشخص نمایید.

۳۲) فرض کنید $a$ عددی صحیح باشد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $a^2-a+1\ ,\ a^2+a+1$ را بیابید:

۳۳) فرض کنید $ax-by=1$ حاصل $(a+b\ ,\ x+y)$ را بیابید:

۳۴) ثابت کنید اگر $(a\ ,\ b)=d$ آنگاه $(\frac{a}{d}\ ,\ \frac{b}{d})=1$.

۳۵) فرض کنید $c|a+b$ ثابت کنید $(a\ ,\ c)=(b\ ,\ c)$

۳۶) فرض کنید $a$ و $b$ دو عدد صحیح باشند ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $k$ داریم:

$(a\ ,\ b)=(a\ ,\ b+ka)$

۳۷) اگر $7x-2\in[6]_{13}$ صورت کلی $x$ را بیابید:

۳۸) تمام جواب‌های $n$ که به ازای آن‌ها معادلهٔ $(2m^2+1)x+(2m-4)y=n$ همواره در $\mathbb{Z}$ جواب دارد را بیابید:

۳۹) باقیماندهٔ تقسیم $17^{19}$ بر ۲۵ را بیابید.

۴۰) ثابت کنید: $[5]_8\subseteq[37]_{24}$

۴۱) یک عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵ چه باقیمانده‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۴۲) باقیماندهٔ یک عدد مکعب کامل در تقسیم بر ۷ چه مقادیری می‌تواند بسازد؟

۴۳) در یک تقسیم مقسوم ۸۴ واحد بیشتر از مقسوم علیه است اگر باقیمانده برابر ۷ باشد تمام مقادیر ممکن برای خارج قسمت را بیابید.

۴۴) عدد $a$ مضرب ۳ است. اگر بدانیم باقیماندهٔ تقسیم $a$ بر ۱۳ برابر یک است، باقیماندهٔ تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

۴۵) به‌ازای چند مقدار صحیح $x$ رابطهٔ $2x+1 \mid 3x+7$ برقرار است؟

۴۶) فرض کنید $a$ , $b$ , $c$ اعداد صحیح مخالف صفر باشند، ثابت کنید اگر $a^2 \mid bc$ , $b \mid a$، آنگاه داریم:

$$ab \mid c^2$$

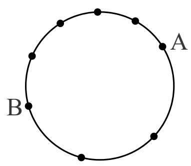
۴۷) معادلهٔ زیر چند جواب صحیح مثبت دارد؟

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 13$$

۴۸) چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که رقم‌هایش از چپ به راست نزولی باشد؟ (ارقام تکراری نباشند.)

۴۹) تاسی را به‌طور متوالی پرتاب می کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای سومین بار ۶ بیاید؟

۵۰) به چند حالت می‌توان ۴ نقطه از بین نقاط زیر انتخاب کرد، به‌گونه‌ای که $AB$ یکی از اضلاع ۴ضلعیِ ایجادشده باشد؟




۵۱) علی و حسین و ۴ نفر دیگر به چند حالت می‌توانند دور یک میز دایره‌ای بشینند به‌طوری که علی روبه‌روی حسین باشد؟

۵۲) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ $right$ حروف $g$ و $t$ کنار هم آمده‌اند؟

۵۳) معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{P(n, n-2)}{C(n, n-3)} = 3(7!)$$

۵۴) در چند عدد ۳ رقمی مجموع رقم‌ها فرد است؟

۵۵) در چند عدد ۳ رقمی حاصل‌ضرب رقم‌ها زوج است؟

۵۶) از بین ۸ جفت کفش مختلف به چند حالت می‌توان ۳ لنگهٔ کفش انتخاب کرد که بین آنها هیچ جفتی وجود نداشته باشد؟

۵۷) شخصی در یک آزمون تستی ۴ گزینه‌ای با ۲۰ سؤال، شرکت کرده است و به همهٔ سؤالات پاسخ می‌دهد. در چند حالت به حداقل ۱۸ سؤال پاسخ درست داده است؟ (همهٔ سؤالات یک پاسخ درست دارند.)

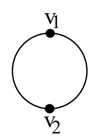
۵۸) شخصی در یک آزمون تستی ۴ گزینه‌ای با ۲۰ سؤال، شرکت کرده است. چند حالت وجود دارد، برای اینکه آن شخص به همهٔ سؤالات پاسخ درست یا غلط دهد؟ (همهٔ سؤالات یک پاسخ درست دارند.)

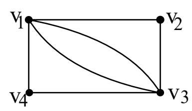
۵۹) تعداد یال‌های گراف کامل $K_p$ از تعداد یال‌های گراف کامل $K_{p-3}$، ۱۵ واحد بیشتر است. تعداد یال‌های $K_p$ چقدر است؟

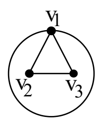
۶۰) گراف ساده و غیرتهی $G$ مفروض است. اگر تعداد یال‌های $G$ دوبرابر تعداد رأس‌هایش باشد، آنگاه $G$ حداقل چند رأس دارد؟

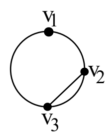
۶۱) تمام گراف‌های مرتبهٔ ۶ را رسم کنید که در همهٔ آنها بیشترین درجهٔ رأس‌ها یک باشد.

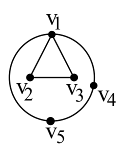
۶۲) کدام‌یک از گراف‌های زیر ساده است؟

الف)


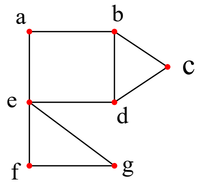

ب)



ج)



د)



هـ)


۶۳) برای گراف مقابل، سه مجموعهٔ احاطه‌گر بنویسید.




۶۴) مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده‌شده:

الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 10 \qquad x_i > 0 , 2 \le i \le 5$

ب) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 12 \qquad x_1 > 2 , x_5 \ge 4$

پ) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 11 \qquad x_i \ge 1 , 1 \le i \le 5$

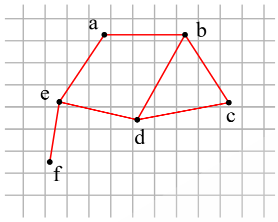
ت) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \qquad x_i \ge 0 , 1 \le i \le 4$

ث) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \qquad x_i \ge 0 , 1 \le i \le 4$

۶۵) شکل مقابل، نمودار گراف $G$ می‌باشد.




الف) مرتبه و اندازهٔ گراف $G$ را بنویسید.

ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید.

پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.

۶۶) جاهای خالی را پر کنید.

الف) $[a,b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

$1)\ a|c\ ,\ b|c \qquad\qquad 2)\forall m > 0 , \cdots\cdots\cdots\cdots$

ب) گراف $G$ را ................ می‌نامیم، هرگاه بین هردو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

پ) مقدار $\gamma(C_n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: ................

ت) هرگاه $(kn + 1)$ کبوتر یا بیشتر در ................ لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ................ کبوتر در آن قرار گرفته است.

۶۷) ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به‌طوری که:

الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

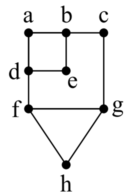
ب) هیچ‌یک از دو کتاب ریاضی کنارهم نباشند.

پ) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص، همواره کنار هم باشند.

۶۸) هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه‌نفره و چهارنفره و یک‌نفره قرار بگیرند؟

۶۹) باقی‌ماندهٔ تقسیم $19 + 38^{36}$ را بر ۴ به‌دست آورید.

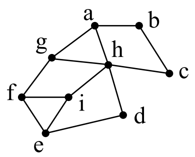
۷۰ در گراف شکل زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.




۷۱ اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a$ یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۷۲ به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد، اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم؟

۷۳ در گراف شکل زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.




۷۴ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم، دست‌کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیرتکراری است؟

۷۵ با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که:

الف) اعداد زوج کنارهم باشند.

ب) اعداد فرد کنارهم باشند.

۷۶ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد $a$ و $b$ بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲a-۵b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۷۷ ۸ نفر را که برای یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

۷۸ گراف $P_۵$ را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

۷۹ یک مربع لاتین چرخشی $۴\times۴$ بنویسید.

۸۰ ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$، $(k\in\mathbb{W})$ نوشته می‌شود.

۸۱ ثابت کنید اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\sqrt{ab}\geq\dfrac{a+b}{۲}$.

۸۲ مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴، ۳، ۲، ۱ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |

۸۳ با ارقام عدد ۴, ۳, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

۸۴ معادلهٔ همنهشتی $۵x\overset{۱۱}{\equiv}۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۸۵ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی را به دست آورید.

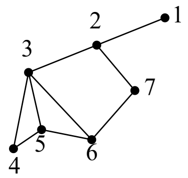
۸۶ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x+۱۳y=۷$ را به‌دست آورید.

۸۷ گراف $G$، ۶رأسی ۳− منتظم است.

الف اندازهٔ گراف $G$ را بیابید.

ب نمودار گراف $G$ را رسم کنید.

**۸۸** در گراف $G$ که شکل آن در مقابل داده شده است:




**الف** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید.

**ب** عدد احاطه‌گری $G$ را تعیین کنید.

**۸۹** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

**الف** الف) اگر $a, b \in R$، داریم:

$$a < b \Leftrightarrow a^{۲} < b^{۲}$$

**ب** ب) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

**پ** پ) اگر $a|b$ و $n, m$ دو عدد طبیعی باشند، که $m \leq n$ آنگاه $a^m | b^n$

**ت** تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

**۹۰** اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟

**الف** معادلهٔ هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۱}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.

# پاسخ‌نامه تشریحی

(۱)
باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$p = ۴k\ (۱)\ ,\ p = ۴k + ۱\ (۲)\ ,\ p = ۴k + ۲\ (۳)\ ,\ p = ۴k + ۳\ (۴)$$

در حالت (۱) و (۳)، $p$ عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

(۲) طبق قضیهٔ تقسیم $k$ را می‌توان به یکی از سه فرم $۳q$، $۳q+۱$ یا $۳q+۲$ نمایش داد.
بنابراین ۳ حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول: $k = ۳q$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|k \to k \overset{۳}{\equiv} ۰ \to k \in [۰]_۳$$

حالت دوم: $k = ۳q + ۱$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|۳q + ۱ - ۱ \to ۳|k - ۱ \to k \overset{۳}{\equiv} ۱ \to k \in [۱]_۳$$

حالت سوم: $k = ۳q + ۲$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|۳q + ۲ - ۲ \to ۳|k - ۲ \to k \overset{۳}{\equiv} ۲ \to k \in [۲]_۳$$

(۳)

$$xy \le \frac{x^۲ + y^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \le x^۲ + y^۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \ge ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ \ge ۰$$

گزاره همواره درست است.

(۴)

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

(۵)

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \ge xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \ge ۲xy + ۲yz + ۲xz \Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) \ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^۲ + (y - z)^۲ + (x - z)^۲ \ge ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

(۶) طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار داریم:

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \frac{۹!}{۳! \times ۲! \times ۲!}$$

(۷) طبق فرض داریم:

$$۳a - ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a - ۷ \to ۱۰|(۴a - ۷) - (۳a - ۵) \to ۱۰|a - ۲ \to a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \quad (I)$$
$$\xrightarrow{(I)} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \times ۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(II)} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

(۸) تذکر: $(a\ ,\ b) = (a\ ,\ ka + b)\ k \in \mathbb{Z}$

$$(a\ ,\ b) = (bq + r\ ,\ b) = (bq + r - bq\ , b) = (r\ ,\ b)$$

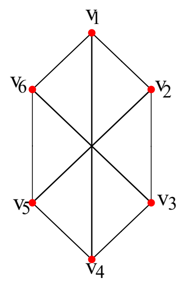
(۹) طبق فرض $a = ۱۷q + ۱۳$ اگر $x$ واحد به $a$ اضافه کنیم به طوریکه خارج قسمت تغییر نکند، الگوریتم تقسیم به فرم زیر در می‌آید:

$$a + x = ۱۷q + (۳ + x)$$

به طوریکه $۳ + x < ۱۷$ یا $x < ۱۴$ در نتیجه حداکثر مقدار $x$ برابر ۱۳ می‌باشد.

(۱۰) به برهان خلف فرض می‌کنیم $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه چون $f$ در $x = a$ پیوسته است پس $f + g - f$ نیز در $x = a$ پیوسته است یعنی $g$ در $a$ پیوسته است که تناقض است. بنابراین باید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته باشد.

(۱۱)




۱۲) رأس $a$ را کنار می‌گذاریم. با بقیهٔ رأس‌ها، $۲^{\binom{۶}{۲}} = ۲^{۱۵}$ گراف می‌توان ساخت. درجهٔ رأس $a$ بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است، پس:

$$\deg a = ۴ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶ \rightarrow \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$$

طبق اصل ضرب، تعداد گراف‌ها برابر است با:

$$۲۲ \times ۲^{۱۵} = ۱۱ \times ۲ \times ۲^{۱۵} = ۱۱ \times ۲^{۱۶}$$

۱۳)

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} \Rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} + ۱۹ = ۲۰ \Rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

۱۴) الف) گزاره درست است زیرا دو عدد فرد $a$ و $a'$ را درنظر می‌گیریم؛ داریم:

$$a = ۲k + ۱ \quad , \quad a' = ۲k' + ۱ \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

$$a + a' = ۲k + ۱ + ۲k' + ۱ = ۲\underbrace{(k + k' + ۱)}_{k''} = ۲k'' \Rightarrow \text{عدد زوج است.}$$

ب) گزاره نادرست است.

از مثال نقض استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۴$ قرار دهیم؛ داریم:

$$۲^{n} - ۱ \overset{n=۴}{=\!=\!=} ۲^{۴} - ۱ = ۱۵ = ۳ \times ۵ \Rightarrow \text{اول نیست.}$$

۱۵) اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{۲} \geq ۰ \quad \text{گزارهٔ همیشه درست}$$

۱۶) فرض کنیم می‌خواهیم ۴ نقطهٔ صحیح را در نظر بگیریم طوری که مختصات وسط هیچ دو نقطه‌ای صحیح نباشد. مختصات این ۴ نقطه حتماً باید به‌صورت زیر باشد:

$A_۱ = (\text{فرد} , \text{فرد})$ $\qquad$ $A_۲ = (\text{زوج} , \text{زوج})$

$A_۳ = (\text{زوج} , \text{فرد})$ $\qquad$ $A_۴ = (\text{فرد} , \text{زوج})$

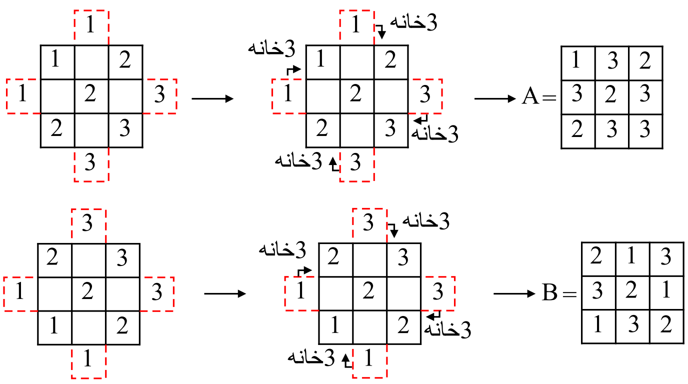
حالا هر نقطه‌ای به این ۴ نقطه اضافه شود، به کمک یکی از آنها نقطهٔ وسط با مختصات صحیح می‌سازد. بنابراین در بین ۵ نقطه حداقل یک جفت نقطه وجود دارد که وسط آنها صحیح است.

۱۷) تعداد جواب‌های این سؤال، معادل تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی است. تعداد این توابع برابر است با:

$$۳^{۶} - ۳ \times ۲^{۶} + ۳ = ۷۲۹ - ۱۹۲ + ۳ = ۵۴۰$$

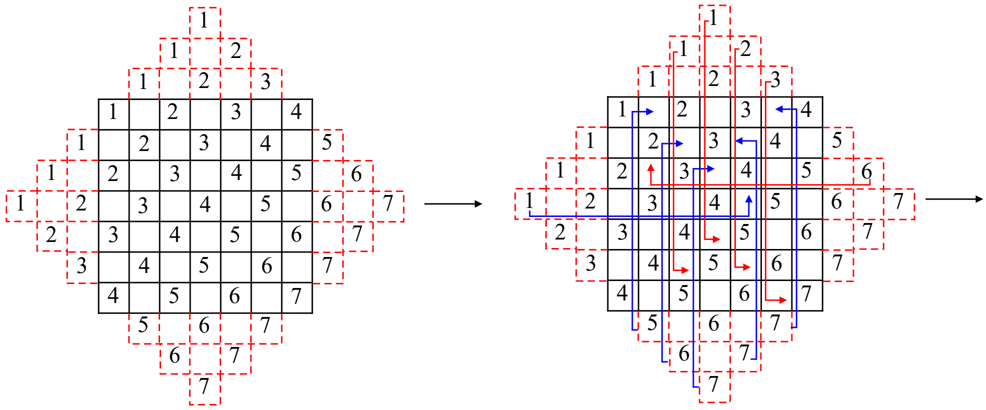
۱۸)

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳، به‌ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

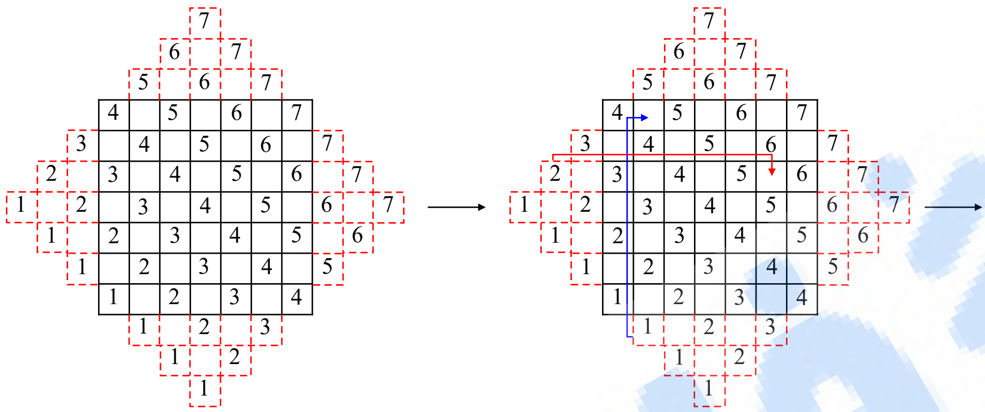



مربع لاتین $A$ و $B$ متعامد هستند.

برای ساخت مربع لاتین مرتبهٔ ۷ نیز به همین روش عمل می‌کنیم:



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 |
| 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 1 |
| 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 1 | 5 |
| 6 | 3 | 7 | 4 | 1 | 5 | 2 |
| 3 | 7 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 |
| 7 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 |



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 |
| 7 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 3 | 7 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 |
| 6 | 3 | 7 | 4 | 1 | 5 | 2 |
| 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 1 | 5 |
| 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 1 |
| 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 |

به این ترتیب دو ماتریس حاصل متعامد خواهند بود.

**۱۹** تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸$ است که برابر است با:

$$\binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

**۲۰** جایگشت ۹ شیء برابر با !۹ است. اما چون ۳ شیء تکراری $(a)$ و ۲ شیء تکراری $(c)$ و ۳ شیء تکراری $(d)$ وجود دارد، طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار، جواب برابر است با:

$$\frac{۹!}{۳!۲!۳!}$$

**۲۱**

تعداد انتخاب دو رقم از $A$:

$$\binom{۴}{۲} = ۶$$

تعداد انتخاب سه رقم از $B$:

$$\binom{۵}{۳} = ۱۰$$

جایگشت ۵ رقم:

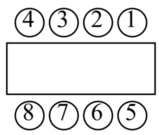
$$۵! = ۱۲۰$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۶ \times ۱۰ \times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$$

**۲۲** برای جایگاه شمارهٔ ۱، هشت انتخاب وجود دارد. سپس برای جایگاه شمارهٔ ۵، یک انتخاب وجود دارد. (چون باید ۱ و ۵ برادر باشند.) به همین ترتیب برای شمارهٔ ۲، شش انتخاب، برای شمارهٔ ۶، یک انتخاب، برای شمارهٔ ۳، چهار انتخاب، برای شمارهٔ ۷، یک انتخاب، برای شمارهٔ ۴، دو انتخاب و برای شمارهٔ ۸، یک انتخاب وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۸۴$$



**۲۳** اگر مجموعهٔ مردان را با $A$ و مجموعهٔ افراد سیاه‌پوست را با $B$ نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۳۰ + ۲۵ - ۳ = ۵۲$$

خواستهٔ مسئله، تعداد اعضای مجموعهٔ $\bar{A} \cap \bar{B}$ است که طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = ۶۰ - ۵۲ = ۸$$

**۲۴**

برای مثال می‌توان به‌صورت مقابل تکمیل کرد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۲ | ۱ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۴ |

(۲۵)
درایهٔ سطر دوم و ستون دوم قطعاً برابر ۴ است، پس با توجه به شکل مقابل، $a$ فقط می‌تواند ۲ باشد و در نتیجه $b$ قطعاً برابر با ۱ است.

بنابراین داریم: $۲a + b = ۲(۲) + ۱ = ۵$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ۳ | ۱ | |
| ۱ | ۴ | ۲ | ۳ |
| | $b$ | | |
| | ۲ | | ۱ |

(۲۶)

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ + ۹ + ۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

بنابراین $۱۳۹۸ \in [۳]_۹$.

(۲۷)
برای عدد صحیح و دلخواه $a$ یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a = ۳k$ آنگاه $۳|a$.

(۲) اگر $a = ۳k + ۱$ آنگاه $۳|a + ۲$.

(۳) اگر $a = ۳k + ۲$ آنگاه $۳|a + ۴$.

(۲۸)
می‌توان نوشت:
$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n + ۱)(n - ۱)$$

حالت ۱: فرض کنیم $n = ۳k$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:
$$n^۳ - n = (۳k)(۳k + ۱)(۳k - ۱) \to ۳|n^۳ - n$$

حالت ۲: فرض کنیم $n = ۳k + ۱$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:
$$n^۳ - n = (۳k + ۱)(۳k + ۲)(۳k) \to ۳|n^۳ - n$$

حالت ۳: فرض کنیم $n = ۳k + ۲$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:
$$n^۳ - n = (۳k + ۲)(۳k + ۳)(۳k + ۱) \to ۳|n^۳ - n$$

پس در هر حالت ثابت کردیم $۳|n^۳ - n$.

(۲۹)

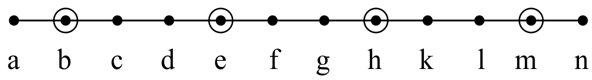
$$\left.\begin{array}{l} a|۵k + ۳ \to a|۹(۵k + ۳) \\ a|۹k + ۴ \to a|۵(۹k + ۴) \end{array}\right\} \longrightarrow a|۹(۵k + ۳) - ۵(۹k + ۴) \longrightarrow a|۷$$

در نتیجه با توجه به اینکه $a > ۱$، $a$ برابر ۷ می‌باشد که عددی اول است.

(۳۰) فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha - \beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha + \beta + \alpha - \beta = ۲\alpha$ گویاست در نتیجه $\alpha$ گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha - \beta$ گنگ است.

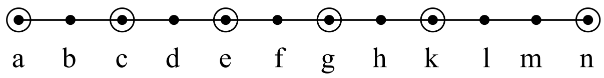
فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha + ۲\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون $\alpha + \beta$ گویا است پس تفاضل آن‌ها یعنی $(\alpha + \beta) - \alpha + ۲\beta = \beta$ گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.

(۳۱)
الف)




$\{b, e, h, m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است. $\gamma(G) = ۴$

ب)




$\{a, c, e, g, k, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

(۳۲) می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|a^{۲}+a+۱ \xrightarrow{a^{۳}-۱=(a-۱)(a^{۲}+a+۱)} d|a^{۳}-۱ \\ d|a^{۲}-a+۱ \xrightarrow{a^{۳}+۱=(a+۱)(a^{۲}-a+۱)} d|a^{۳}+۱ \end{array}\right\} \to d|a^{۳}+۱-a^{۳}+۱ \to d|۲$$

بنابراین ۲ یا $d=۱$ از طرفی چون $a^{۲}+a$ به ازای هر عدد صحیح و دلخواه $a$ زوج است بنابراین $a^{۲}+a+۱$ همواره فرد است و چون $d|a^{۲}+a+۱$ بنابراین $d=۱$.

**۳۳** فرض کنید $(a+b\,,\,x+y)=d$ آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} d|a+b \to d|x(a+b) \\ d|x+y \to d|b(x+y) \end{array}\right\} \to d|ax+b\cancel{x}-\cancel{b}x-by \to d|ax-by \to d|۱$$

بنابراین $d=۱$.

**۳۴** فرض کنید $(\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d})=d'$ و می‌دانیم $d'\geq ۱$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d'|\frac{a}{d} \to dd'|a \\ d'|\frac{b}{d} \to dd'|b \end{array}\right\} \xrightarrow[dd'|(a\,,\,b)]{(a\,,\,b)=d} dd'\leq d \to d'\leq ۱$$

حال از $d'\geq ۱\,,\,d'\leq ۱$ نتیجه می‌گیریم: $d'=۱$.

**۳۵** تذکر: $(a\,,\,b)=(a\,,\,ka+b)\;k\in\mathbb{Z}$

طبق فرض داریم $a+b=ck$ می‌توان نوشت:

$$(a\,,\,c)=(ck-b\,,\,c)=(ck-b-ck\,,\,c)=(-b\,,\,c)=(b\,,\,c)$$

**۳۶** فرض کنید $(a\,,\,b)=d\,,\,(a\,,\,b+ka)=d'$ چون $d|b+ka$ پس $d|d'$. از طرف دیگر $d'|a$ بنابراین $d'|ka$ و چون $d'|b+ka$ پس $d'|b+ka-ka$ و یا $d'|b$ درنتیجه $d'|d$ به این ترتیب $d'=d$.

**۳۷** $۷x-۲\in[۶]_{۱۳}$ معادل این است که $۷x-۲\overset{۱۳}{\equiv}۶$ یا $۷x\overset{۱۳}{\equiv}۸$ می‌توان نوشت:

$$۷x\overset{۱۳}{\equiv}۸\overset{۱۳}{\equiv}۸+۱۳\overset{۱۳}{\equiv}۲۱\xrightarrow{(۷,۱۳)=۱}x\overset{۱۳}{\equiv}۳\to x=۱۳k+۳$$

**۳۸** فرض کنید $(۲m^{۲}+۱,۲m-۴)=d$ باید $d|n$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|۲m-۴ \to d|۲m^{۲}-۴m \\ d|۲m^{۲}+۱ \end{array}\right\} \to d|۴m+۱$$

$$\left.\begin{array}{l} d|۴m+۱ \\ d|۲m-۴ \to d|۴m-۸ \end{array}\right\} \to d|۹$$

بنابراین اگر $n=۹k$ باشد $d$ در هر صورت آن را عاد خواهد کرد.

**۳۹** می‌توان نوشت:

$$۱۷\overset{۲۵}{\equiv}۱۷-۲۵\overset{۲۵}{\equiv}-۸\overset{۲۵}{\equiv}-۲^{۳}\to ۱۷^{۱۹}\overset{۲۵}{\equiv}(-۲^{۳})^{۱۹}\overset{۲۵}{\equiv}-۲^{۵۷}$$

حال با محاسبهٔ توان‌های ۲ بر هم‌نهشتی $۲^{۱۰}\overset{۲۵}{\equiv}۱۰۲۴\overset{۲۵}{\equiv}-۴۱\times۲۵+۱۰۲۴\overset{۲۵}{\equiv}-۱$ می‌رسیم، پس داریم:

$$(۲^{۱۰})^{۵}\overset{۲۵}{\equiv}(-۱)^{۵}\to ۲^{۵۰}\overset{۲۵}{\equiv}-۱\to ۲^{۵۰}\times۲^{۷}\overset{۲۵}{\equiv}(-۱)\times(۲^{۷})$$

$$۲^{۵۷}\overset{۲۵}{\equiv}-۲^{۷}\overset{۲۵}{\equiv}-۱۲۸\overset{۲۵}{\equiv}-۱۲۸+۵\times۲۵\overset{۲۵}{\equiv}-۳$$

بنابراین داریم:

$$۱۷^{۱۹}\overset{۲۵}{\equiv}-۲^{۵۷}\overset{۲۵}{\equiv}(-۱)(-۳)\overset{۲۵}{\equiv}۳$$

**۴۰**

$$\left.\begin{array}{r} a\in[۳۷]_{۲۴}\to a\overset{۲۴}{\equiv}۳۷\xrightarrow{۸|۲۴}a\overset{۸}{\equiv}۳۷ \\ ۳۷\overset{۸}{\equiv}۵ \end{array}\right\}\to a\overset{۸}{\equiv}۵$$

در نتیجه $a\in[۵]_{۸}$ بنابراین $[۳۷]_{۲۴}\subseteq[۵]_{۸}$.

**۴۱** عدد صحیح و دلخواه $a$ در تقسیم بر ۵ به یکی از ۵ صورت $۵k\,,\,۵k\pm۱\,,\,۵k\pm۲$ است. حال کافی است هریک از صورت‌های فوق را به توان ۲ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ بدست آید:

$$a=۵k\to a^{۲}=۵k'$$
$$a=۵k\pm۱\to a^{۲}=۵k'+۱$$
$$a=۵k\pm۲\to a^{۲}=۵k'+۴$$

پس مربع هر عدد صحیح درتقسیم بر ۵ تنها می‌تواند باقیمانده‌های ۰ و ۱ و ۴ را بسازد.

**۴۲** هر عدد صحیح دلخواه $a$ در تقسیم بر ۷ به یکی از ۷ حالت $۷k\,,\,۷k\pm۱\,,\,۷k\pm۲\,,\,۷k\pm۳$ است. باید هریک از حالت‌های فوق عدد $a$ را به توان ۳ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن $a^{۳}$ تقسیم بر ۷ بیابیم:

$$a=۷k\to a^{۳}=۷k'$$
$$a=۷k\pm۱\to a^{۳}=۷k'\pm۱$$
$$a=۷k\pm۲\to a^{۳}=۷k'\pm۱$$
$$a=۷k\pm۳\to a^{۳}=۷k'\pm۱$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم مکعب هر عدد صحیح بر ۷ فقط می‌تواند یکی از مقادیر ۰ ، ۱ ، ۶ باشد.

**۴۳** طبق فرض می‌توان نوشت:

$$b+84=bq+7\ ,\quad b>7\to b(q-1)=77=77\times 11$$
$$b=11\to q-1=7\to q=8$$
$$b=11\times 7\to q-1=1\to q=2$$

پس دو مقدار برای خارج قسمت وجود دارد.

**۴۴** طبق فرض $a=13k+1$ برای $k$ تقسیم بر ۳، سه حالت $3k'\pm 1, 3k'$ وجود دارد اگر $k$ به دو صورت $3k'$ و یا $3k'+1$ باشد دیگر $a$ مضرب ۳ نمی‌شود. بنابراین $k$ باید به فرم $3k'-1$ باشد؛ حال می‌توان نوشت:

$$a=13k+1=13(3k'-1)+1=13\times 3k'-13+1=13\times 3k'-12\Rightarrow \frac{a}{3}=13k'-4$$
$$=13q+9$$

پس باقیماندهٔ تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۳ برابر ۹ است.

**۴۵**

$$\left.\begin{array}{l}2x+1\,|\,(3x+7)\times 2\\ 2x+1\,|\,(2x+1)\times 3\end{array}\right\}\to 2x+1\,|\,(6x+14)-(6x+3)\to 2x+1\,|\,11$$

$$\begin{cases}1)\ 2x+1=11\to x=5\ \checkmark\\ 2)\ 2x+1=-11\to x=-6\ \checkmark\\ 3)\ 2x+1=1\to x=0\ \checkmark\\ 4)\ 2x+1=-1\to x=-1\ \checkmark\end{cases}$$

**۴۶**

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}a^2\,|\,bc\\ b\,|\,a\end{array}\right\}\to a^2b\,|\,bca\to a\,|\,c$$

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l}b\,|\,a\to b^2\,|\,a^2\\ a^2\,|\,bc\end{array}\right\}\to b^2a^2\,|\,a^2bc\to b\,|\,c$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} ab\,|\,c^2$$

**۴۷**

هدف مسئله یافتن تعداد جواب‌های طبیعی معادله است که برابر است با:

$$\binom{13-1}{10-1}=\binom{12}{9}=\binom{12}{3}=220$$

**۴۸** اگر ۵ رقم متفاوت داشته باشیم، برای چیدن آنها کنارهم، فقط یک حالت قابل قبول داریم. باید از بزرگ به کوچک مرتب کنیم. بنابراین تعداد کل حالات برابر با تعداد انتخاب‌های ۵ رقم از بین ۱۰ رقم است که برابر با $\binom{10}{5}$ است.

دقت کنیم که نگران صفر بودن رقم سمت چپ نیستیم، چون چنین حالتی با فرض نزولی بودن ارقام ممکن نیست.

**۴۹** برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای سومین بار، ۶ بیاید، باید در ۸ پرتاب اول ۲ بار ۶ بیاید و ۶ بار یکی از اعداد ۱ تا ۵ بیاید. برای اینکه انتخاب کنیم در کدام پرتاب‌ها ۶ بیاید، باید ۲ پرتاب از ۸ پرتاب را انتخاب کنیم که تعداد حالات برابر با $\binom{8}{2}$ است و برای هر کدام از پرتاب‌هایی که ۶ نیامده است، ۵ حالت وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

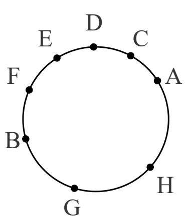
تعداد حالات هر کدام از پرتاب‌هایی

که ۶ نیامده

$$\binom{8}{2}\times 5\times \underbrace{5\times\cdots\times 5}_{\text{۶بار}}=28\times 5^6$$

تعداد حالات برای اینکه کدام پرتاب ۶ آمده

**۵۰**




طبق شکل زیر، باید یا ۲ نقطه از بین نقاط $F, E, D, C$ انتخاب کنیم که برای این کار، $\binom{4}{2}$ انتخاب داریم. یا باید ۲ نقطه از بین نقاط $H, G$ انتخاب کنیم که برای این کار $\binom{2}{2}$ انتخاب داریم.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{2}+\binom{2}{2}=6+1=7$$

۵۱) ابتدا فرض می‌کنیم علی نشسته است. برای این کار فرقی ندارد که کجا بنشیند و همهٔ حالت‌ها مشابه‌اند. حالا برای جایگاه حسین، فقط یک حالت وجود دارد (روبه‌روی علی). سپس ۴ نفر دیگر به $۴!$ حالت، می‌توانند در جایگاه‌های باقی‌مانده جایگشت داشته باشند. بنابراین جواب نهایی $۴!$ است.

۵۲) حروف $t$ و $g$ را به‌صورت یک شیء در نظر می‌گیریم و جایگشت ۴ شیء مقابل را به دست می‌آوریم که برابر با $۴!$ است.

$$\boxed{r}\quad \boxed{i}\quad \boxed{h}\quad \boxed{gt}$$

از طرفی $t$ و $g$ در کنار هم به $۲!$ حالت می‌توانند جایگشت داشته باشند. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۴! \times ۲! = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$$

۵۳) می‌دانیم:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{و} \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین:

$$\frac{P(n,n-۲)}{C(n,n-۳)} = \frac{\frac{n!}{۲!}}{\frac{n!}{(n-۳)!۳!}} = \frac{(n-۳)!۳!}{۲!} = ۳((n-۳)!)$$

پس معادلهٔ داده‌شده به‌صورت مقابل حل می‌شود:

$$۳((n-۳)!) = ۳(۷!) \Rightarrow n-۳ = ۷ \Rightarrow n = ۱۰$$

۵۴) حالت اول: هر ۳ رقم فرد باشد. در این صورت برای هر رقم، ۵ انتخاب وجود دارد. تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{صدگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{یکان}} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$$

حالت دوم: دو رقم زوج باشد و یک رقم فرد باشد. خود این حالت را نیز به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم. یک: اگر یکان فرد باشد، تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{\boxed{\text{۴ حالت}}}_{\text{صدگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{یکان}} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } ۴ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

دو: دهگان فرد است که تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{\boxed{\text{۴ حالت}}}_{\text{صدگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{یکان}} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } ۴ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

سه: صدگان فرد است که تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{صدگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\boxed{\text{۵ حالت}}}_{\text{یکان}} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$\underbrace{۱۲۵}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۲۵}_{\text{حالت دوم}} = ۴۵۰$$

۵۵) ابتدا تعداد کل اعداد سه‌رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\underline{۹} \times \underline{۱۰} \times \underline{۱۰} = ۹۰۰$$

اگر هر سه رقم فرد باشند، حاصل‌ضرب آنها فرد است. تعداد این دسته از اعداد، برابر است با:

$$\underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۵} = ۱۲۵$$

در اعداد باقی‌مانده، حاصل‌ضرب ارقام زوج است، بنابراین داریم:

$$۹۰۰ - ۱۲۵ = ۷۷۵$$

۵۶) می خواهیم ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم که هر کدام برای یک جفت کفش متفاوتی باشد. پس ابتدا ۳ جفت کفش انتخاب می‌کنیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر با $\binom{۸}{۳}$ است. سپس از هر کدام از این ۳ جفت، یک لنگه انتخاب می‌کنیم که برای هر کدام ۲ حالت وجود دارد.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۸}{۳} \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۵۶ \times ۸ = ۴۴۸$$

۵۷) حالت اول: اگر به ۱۸ سؤال پاسخ درست داده باشد، ابتدا باید آن ۱۸ سؤال را مشخص کنیم. این کار به $\binom{۲۰}{۱۸}$ حالت ممکن است. برای جواب دادن به دو سؤال غلط هم، $۳ \times ۳$ حالت وجود دارد. پس تعداد حالات در این بخش برابر است با:

$$\binom{۲۰}{۱۸} \times ۳ \times ۳ = ۱۷۱۰$$

حالت دوم: اگر به ۱۹ سؤال پاسخ درست داده باشد، ابتدا باید آن ۱۹ سؤال را مشخص کنیم. این کار به $\binom{۲۰}{۱۹}$ حالت، ممکن است. برای جواب دادن به یک سؤال غلط هم ۳ حالت وجود دارد.

پس تعداد حالات در این بخش برابر است با:

$$\binom{۲۰}{۱۹} \times ۳ = ۶۰$$

حالت سوم: اگر به ۲۰ سؤال پاسخ درست داده باشد، فقط یک حالت وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۱۷۱۰ + ۶۰ + ۱ = ۱۷۷۱$$

(۵۸) این شخص برای پاسخ به هر سؤال ۴ انتخاب دارد. پس برای پاسخ به همهٔ سؤالات، تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\underbrace{۴ \times ۴ \times \cdots \times ۴}_{\text{۲۰ تا}} = ۴^{۲۰}$$

(۵۹)

$$K_p: q = \frac{p(p-۱)}{۲} \quad , \quad K_{p-۳}: q = \frac{(p-۳)(p-۴)}{۲}$$

$$\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{(p-۳)(p-۴)}{۲} + ۱۵ \xrightarrow{\times ۲} p^۲ - p = p^۲ - ۷p + ۱۲ + ۳۰ \Rightarrow ۶p = ۴۲ \Rightarrow p = ۷$$

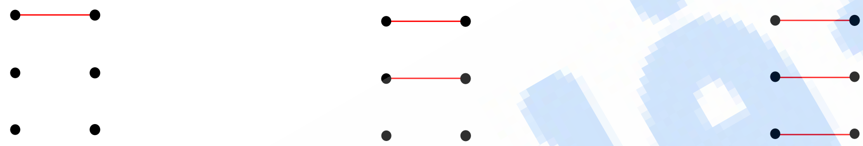
$$q = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

(۶۰)

$$۰ \leqslant q \leqslant \frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q=۲p} ۲p \leqslant \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۴ \leqslant p - ۱ \Rightarrow p \geqslant ۵$$

حداقل ۵ رأس

(۶۱)



(۳) (۲) (۱)

(۶۲) الف – ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس $v_۱$ و $v_۲$ بیش از یک یال رسم شده است.

ب – ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس $v_۱$ و $v_۳$ بیش از یک یال رسم شده است.

ج – ساده نیست، زیرا در رأس $v_۱$ طوقه وجود دارد.

د – ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس $v_۲$ و $v_۳$ بیش از یک یال رسم شده است.

ه – گراف ساده است.

(۶۳)

$$A = \{e, d\}$$
$$B = \{b, f\}$$
$$C = \{c, e\}$$

(۶۴)

**الف**

با تغییر متغیر $x_i = y_i + ۱ \ , \ ۲ \leq i \leq ۵$ داریم:

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۱۰ - ۴ = ۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵ + ۶ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

**ب**

با تغییر متغیر $x_۵ = y_۵ + ۴ \ , \ x_۱ = y_۱ + ۳$ داریم:

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۱۲ - ۴ - ۳ = ۵$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۹}{۴}$$

**پ**

با تغییر متغیر $x_i = y_i + ۱ \ , \ ۱ \leq i \leq ۵$ داریم:

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۱۱ - ۵ = ۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵ + ۶ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

**ت**

اگر $x_۲ = ۰$ باشد، $x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳ + ۷ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۹}{۲}$$

اگر $x_۲ = ۱$ باشد، $x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۴$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳ + ۴ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۶}{۲}$$

اگر $x_2 = ۲$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۱$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲}$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{۹}{۲} + \binom{۶}{۲} + \binom{۳}{۲} = ۳۶ + ۱۵ + ۳ = ۵۴$$

**ث**

اگر $x_2 = ۰$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۳$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵}{۲}$$

اگر $x_2 = ۱$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۲$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۲-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲}$$

اگر $x_2 = ۴$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۱$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲}$$

اگر $x_2 = ۹$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۰$ است و یک جواب دارد.

پس جوا ب نهایی برابر است با:

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} + ۱ = ۲۰$$

**۶۵**

**الف**

$p = ۶ \quad , \quad q = ۷$

**ب**

$N_G(b) = \{a, d, c\}$

**پ**

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \overset{p=۶}{=\!=} ۱۵$$

$$q(\overline{G}) + ۷ = ۱۵$$

$\Rightarrow q(\overline{G}) = ۸ \Rightarrow$ مجموع درجه‌های رئوس گراف $\overline{G} = ۱۶$

**۶۶**

**الف**

$\forall m > ۰ \, , \; a|m \, , \; b|m \Rightarrow c \le m$

**ب** گراف $G$ را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هردو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

**پ**

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$$

**ت** هرگاه $(kn + ۱)$ کبوتر یا بیشتر در $n$ لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k + ۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

**۶۷**

**الف** ۴ کتاب فیزیک را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۵ کتاب مفروض ریاضی روی هم ۶ شیء بوده و !۶ جایگشت داشته و در هر یک از حالت‌ها ۴ کتاب فیزیک هم !۴ جایگشت دارند، لذا طبق اصل ضرب داریم: $۶! \times ۴!$

کتاب ریاضی: $\square$

کتاب فیزیک: $\triangle$

$\triangle \; \triangle \; \underbrace{\square \, \square \, \square \, \square}_{\text{کتاب فیزیک } ۴=۴!} \; \triangle \; \triangle \; \triangle \rightarrow$ حالات مطلوب : $۶! \times ۴!$

**ب** کتاب ریاضی را با $\square$ و کتاب فیزیک را با $\triangle$ نشان می‌دهیم؛ مطابق شکل زیر برای اینکه هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، باید کتاب‌های ریاضی و فیزیک را یک‌درمیان قرار دهیم:

$\square \, \triangle \, \square \, \triangle \, \square \, \triangle \, \square \, \triangle \, \square$

$$\left.\begin{array}{l} \text{جایگشت کتاب‌های ریاضی} : ۵! \\ \text{جایگشت کتاب‌های فیزیک} : ۴! \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} ۵! \times ۴!$$

**پ** یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۶ کتاب مفروض باقی‌مانده روی هم، ۷ شیء بوده و !۷ جایگشت داشته و در هریک از حالت‌ها، یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک هم !۳ جایگشت دارند؛ لذا طبق اصل ضرب داریم:

$۷! \times ۳!$

۶۸

$$\frac{۸!}{۳! \times ۲!} = ۲۸۰ \text{ یا } \binom{۸}{۳}\binom{۵}{۴}\binom{۱}{۱} = ۲۸۰$$

۶۹

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۲^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۲^{۳۶} + ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۳$$

۷۰

$$D = \{a, e, c, h\}$$

۷۱ طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$a = ۳k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است یا $a = ۳k + ۱ \Rightarrow a + ۲ = ۳(k + ۱)$ یا $a = ۳k + ۲ \Rightarrow a + ۴ = ۳(k + ۲)$ که در هر دو بر ۳ بخش‌پذیراند.

۷۲

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \,,\ x_۱ \geq ۱ \,,\ x_۴ > ۳ \,,\ x_۶ = ۱$$

$$y_۱ = x_۱ - ۱ \,,\ y_۱ \geq ۰ \,,\ y_۴ = x_۴ - ۴ \,,\ y_۴ \geq ۰$$

$$y_۱ + ۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۵ + ۱ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۶ \Rightarrow \text{حالات مطلوب} = \binom{۶ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

۷۳

$$D = \{a, c, i, d\}$$

۷۴

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲ \,,\quad k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$$

$$\text{تعداد کبوترها} = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$$

۷۵ الف) اعداد زوج را در یک بسته قرار می‌دهیم؛ داریم:

$$۷, ۳, \boxed{۴, ۶, ۸}$$

بنابراین تعداد جایگشت‌های اعداد ۵ رقمی موردنظر برابر است:

$$۳! \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت عددهای زوج}}$$

ب) اعداد فرد را در یک بسته قرار می‌دهیم؛ داریم:

$$۶, ۸, \boxed{۷, ۳}, ۴$$

بنابراین تعداد جایگشت‌های اعداد ۵ رقمی موردنظر برابر است:

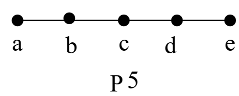
$$۴! \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت عددهای فرد}}$$

۷۶

$$\left.\begin{array}{l} a = ۱۷q + ۵ \\ b = ۱۷q' + ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a - ۵b = ۱۷ \times ۲q + ۱۰ - ۱۷ \times ۵q' - ۱۵ = ۱۷(۱۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ = ۱۷k + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

۷۷ حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع‌های موجود از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی است که برابر با $۸^۴$ است.

۷۸ شکل زیر را در نظر بگیرید:




$$abcd \quad , \quad bcde$$

۷۹

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |

۸۰ هرگاه $p$ را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = ۶k \ (۱) \quad , \quad p = ۶k + ۱ \ (۲) \quad , \quad p = ۶k + ۲ = ۲(۳k + ۱) \ (۳)$$

$$p = ۶k + ۳ = ۳(۲k + ۱) \ (۴) \quad , \quad p = ۶k + ۴ = ۲(۳k + ۲) \ (۵) \quad , \quad p = ۶k + ۵ \ (۶)$$

$p$ در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن $p$ تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، $p$ می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

۸۱

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geq ۰$$

نابرابری آخر برای $a$ و $b$ نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۸۲ با استفاده از جایگشت $۱ \to ۲, ۲ \to ۳, ۳ \to ۴, ۴ \to ۱$ مربع لاتین به‌صورت مقابل داریم.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |
| ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |

۸۳ طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار داریم:

$$\frac{۷!}{۲! \times ۳!} = ۴۲۰$$

۸۴

$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k+۷$$

۸۵

$$۱ \leq j \leq ۳ \quad A_j = \{f : A \to B | f(a_i) \neq b_j \ ; ۱ \leq i \leq ۴\}$$

$$A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\} \ , \ B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$$

$$|S| = ۳^۴, |A_i| = ۲^۴, |A_i \cap A_j| = ۱^۴ \ , |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |S| - (|A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۲ \cap A_۳|$$
$$-|A_۱ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|) = ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$$

۸۶ معادله سیاله دارای جواب است زیرا $(۹, ۱۳) = ۱ | ۷$

$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \to ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴ \to y = ۹k+۴$$

در نتیجه با جایگذاری $y = ۹k+۴$ در معادلهٔ سیاله $۹x + ۱۳y = ۷$ داریم:

$$x = -۱۳k - ۵$$

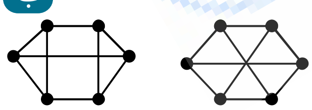
۸۷

الف

$$۳ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$$

ب

رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است.



۸۸

الف $\{۱, ۶, ۴\}$ یا $\{۱, ۵, ۷\}$

ب

بنابراین: $\left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil$ $\gamma(G) \geq ۲$ $(*)$. از سوی دیگر $\{۲, ۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq ۲$ $(**)$. از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که $\gamma(G) = ۲$.

تذکر: اگر $G$ یک گراف $n$ رأسی با ماکزیمم درجهٔ $\Delta$ باشد، داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

۸۹

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت نادرست

۹۰

۱۲ بهمن سه‌شنبه است $\Rightarrow 29 + 30 + 30 + 12 \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow$ شنبه = اول مهر

**الف**

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow{\div 4} 2x \overset{\frac{12}{4}}{\equiv} 5 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 5 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$